Chapitre 05 : ARITHMÉTIQUE

0) Activité d'introduction :

I) Division euclidienne :

1) Définition : Division euclidienne

Effectuer la division euclidienne de a par b , c'est trouver deux nombres entiers q et le r , tels que :

$$a = b \times q + r$$

$$\begin{array}{lcl} \text{dividende} & \rightarrow & a \\ \text{reste} & \rightarrow & r \end{array} \left| \begin{array}{l} b \\ \hline q \end{array} \right. \begin{array}{l} \leftarrow \text{diviseur} \\ \leftarrow \text{quotient} \end{array}$$

avec $r < b$ où q est le **quotient** (entier) et r le reste de la division euclidienne.

Exemples :

1) Avec 180 crayons, combien est-il possible de compléter de boîtes de 8 crayons ?

$$8 \times 22 = 176 < 180$$

$$8 \times 23 = 204 > 180$$

Pour compléter 22 boîtes, on utilise 176 crayons sur les 180 disponibles, il restera 4 crayons.

Mathématiquement : $180 = 8 \times 22 + 4$.

2) Effectuer la division euclidienne de 739 par 8.

II) Multiple et diviseur :

1) Définition : Multiple :

Les **multiples** d'un nombre entier sont

Exemples :

1) Pourquoi 12 est un multiple de 3 ?

2) Trouve deux multiples de 24.

2) Définition : Diviseur – Divisible :

Un nombre entier a est **divisible** par un nombre entier b si

.....

On dit que b a ou encore que b est un de a .

Exemples :

1) Montrer que 12 est divisible par 4.

2) Donner tous les diviseurs de 36.

3) Propriété :

Un nombre entier strictement supérieur à 1 admet au moins deux diviseurs : et

Démonstration :

Soit x un nombre entier.

$x = x \times 1 + 0$ le reste de la division euclidienne de x par x est 0 donc x divise x .

$x = 1 \times x + 0$ le reste de la division euclidienne de x par 1 est 0 donc 1 divise x .

Exemples :

1) 45 est divisible par 1, 3, 5, 9, 15 et 45.

2) 11 est divisible par 1 et 11.

III) Critère de divisibilité :

1) Propriété : Les entiers divisibles par 2, par 5 ou par 10 :

Ils sont reconnaissables à leur chiffre des unités :

- les entiers **divisibles par 2** sont les nombres Ils se terminent par
- les entiers **divisibles par 5** se terminent par ou ;
- les entiers **divisibles par 10** se terminent par

Exemples :

1) 378 est divisible par 2 car

2) Entoure en bleu les nombres divisibles par 2, en vert les nombres divisibles par 5 et en rouge les nombres divisibles par 10 :

100 ; 55 ; 60 ; 8 ; 12 496 ; 3 954 ; 8 540.

2) Propriété : Les entiers divisibles par 3 ou par 9 :

Ils sont reconnaissables à la somme de tous leurs chiffres :

- les entiers **divisibles par 3** sont les nombres dont
- les entiers **divisibles par 9** sont les nombres dont

Exercices :

1) Prouver que 8 704 698 est divisible par 3 mais non divisible par 9

2) Prouve que 1 248 est divisible par 3 et par 9.

3) Propriété : Les entiers divisibles par 4 :

Les nombres entiers divisibles par 4 sont ceux dont

Exercices :

1) 8 704 636 est divisible par 4 car

2) Prouve que 1 248 est divisible par 4.

IV) Diviseurs communs à deux nombres entiers :

1) Définition : Diviseurs communs :

a , b et k désignent des nombres entiers avec $k \neq 0$.

Dire que k est un **diviseur commun** à a et b signifie que k

Exemples :

- 1) Trouver un diviseur commun de 25 et de 15.
- 2) Trouver tous les diviseurs communs de 96 et 64.

2) Définitions : Diviseur – Divisible :

a et b désignent deux nombres entiers non nuls.

Le plus grand diviseur commun à a et b est appelé le **PGCD** de a et b (**P**lus **G**rand **C**ommun **D**iviseur).

On le note PGCD (a ; b).

Exemples :

- 1) Les diviseurs de 24 sont :
Les diviseurs de 36 sont :
Parmi leurs diviseurs communs (.....), le plus grand est
On en déduit que PGCD (24 ; 36) =
- 2) Trouver le PGCD (60; 75).

3) Propriété :

a et b désignent deux nombres entiers non nuls.

- PGCD (a ; a) =
- PGCD (a ; b) = PGCD (..... ;)
- Si b est un diviseur de a alors PGCD (a ; b) =

Exemples :

- 1) Recherche du PGCD (6 ; 6) :
Les diviseurs de 6 sont :
Les diviseurs de 6 sont :
Parmi leurs diviseurs communs (.....), le plus grand est
On en déduit que PGCD (6 ; 6) =
- 2) PGCD (24 ; 36) = PGCD (.....;) =
- 3) PGCD (12 ; 6) =

4) Définition : Nombres premiers entre eux :

Dire que deux nombres entiers sont **premiers entre eux** signifie que

Exemples :

- 1) Les diviseurs de 16 sont : 1 – 2 – 4 – 8 – 16.
Les diviseurs de 9 sont : 1 – 3 – 9.
1 est le seul diviseur de 9 et de 16.
On en déduit que PGCD (9 ; 16) = **1** et donc que les nombres 9 et 16 sont premiers entre eux.
- 2) Prouver que les nombres 6 et 35 sont premiers entre eux.

V) Fractions irréductibles :

1) Définition : Fractions irréductibles :

Dire qu'une fraction est **irréductible** signifie

Exemples :

1) $\frac{16}{9}$ est une fraction irréductible car

2) Donner 3 exemples de fractions irréductibles.

2) Propriété : Rendre une fraction irréductible

Si l'on simplifie une fraction par le PGCD de son numérateur et de son dénominateur, **alors** on obtient

Exemples :

1) PGCD (24 ; 36) = donc :

$$\frac{24}{36} = \frac{24 \div \dots}{36 \div \dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

2) Simplifier la fraction $\frac{242}{66}$.

Remarque :

Méthodes pour rendre une fraction irréductible :

	Avantages	Désavantages
Critères de divisibilité	- Réalisable depuis la 6ème.	- Difficile de savoir si la fraction est irréductible - Par toujours facile de trouver la liste des diviseurs du numérateur et du dénominateur
Diviser par le PGCD	- Assurance d'obtenir une fraction irréductible	- Nécessite de calculer le PGCD du numérateur et du dénominateur - Parfois plus longue à mettre en oeuvre

3) Conséquence de la propriété 2 :

Si le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont premiers entre eux, **alors** cette fraction est

Exemple :

1) PGCD (16 ; 9) = 1 donc :

$$\frac{16}{9} = \frac{16 \div 1}{9 \div 1} = \frac{16}{9}$$

VI) Algorithme de calcul du PGCD :

1) Propriété : Algorithme des soustractions successives

a et b désignent des nombres entiers non nuls avec $a > b$.

$$\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD} (\quad ; \quad)$$

Exemples :

1) $\text{PGCD}(24 ; 36) = \text{PGCD}(36 ; 24)$

=
=
=
=
=
=
=

2) Calculer le PGCD de 242 et 66 par la méthode des soustractions successives et simplifier la fraction : $\frac{242}{66}$.

2) Propriété : Algorithme d'Euclide (admise)

a et b désignent des nombres entiers non nuls avec $a > b$.

$$\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r) \quad \text{où } r \text{ est le reste de la division euclidienne de } a \text{ par } b.$$

Exemples :

1) $\text{PGCD}(24 ; 36)$

$$36 = 24 \times 1 + 12$$

$$24 = 12 \times 2 + 0$$

← Le PGCD est le dernier reste non nul.

2) Calculer le PGCD de 242 et 66 grâce à l'algorithme d'Euclide et simplifier la fraction : $\frac{242}{66}$.