Chapitre 01 :

ARITHMÉTIQUE

I) Multiples et Diviseurs :

1) Définition : Entier naturel :

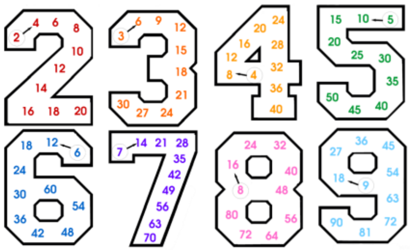
Un **entier naturel** est un nombre entier positif ou nul.

Exemple : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ..., 1 092, ..., 9 575 123, ... sont des entiers naturels.

2) Définition : Multiple :

Les **multiples** d'un nombre entier sont tous les nombres de sa table de multiplication.

Exemples :
1. 12 est dans la table de multiplication de 3, donc 12 est un **multiple** de 3.
2. 35 est un multiple de 5 car il existe un nombre tel que 5 × ... = 35.



Exercices :
1. Trouver 7 multiples de 8.
2. Donner la particularité des multiples de 10.

3) Définition : Diviseur :

On dit que le nombre entier b est un diviseur du nombre entier a lorsque le résultat de la division de a par b est un nombre entier. (On dit aussi que a est divisible par b.)

Exemples :
1. 8 est un diviseur de 24 car $\frac{24}{8} = 3$ et 3 est un nombre entier.
2. 5 **N'est PAS** un diviseur de 32 car $\frac{32}{5} \approx 6{,}4$ et 6,4 **N'est PAS** un nombre entier.
3. 3 **N'est PAS** un diviseur de 10 car $\frac{10}{3} \approx 3{,}33..$ et 3,33.. **N'est PAS** un nombre entier.

Exercices :
1. Trouver tous les diviseurs de 12.
2. Justifier que 412 n'est pas un diviseur de 4963.

II) Critères de divisibilité :

(Les 3 propriétés sont admises ainsi que leurs réciproques)

1) Propriété : Les entiers divisibles par 2, par 5, ou par 10 :

Ils sont reconnaissables à leur chiffre des unités :
- Les entiers **divisibles par 2** sont les nombres pairs, Ils se terminent par 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- Les entiers **divisibles par 5** se terminent par 0 ou 5 ;
- Les entiers **divisibles par 10** se terminent par 0.

Exemples :
1. 378 est divisible par 2 car son chiffre des unités est 8.
2. 1 414 **N'est PAS** divisible par 5 car il ne finit pas par 5 ou 0.
3. 999 999 999 999 999 999 990 est divisible par 10 car il finit par 0.

Exercice :
Entourer en bleu les nombres divisibles par 2, en vert les nombres divisibles par 5 et en rouge les nombres divisibles par 10 :
1 407 - 548 ; 344 ; 147 ; 548 ; 2 412 ; 36 413 ; 4 353

2) Propriété : Les entiers divisibles par 3 ou par 9 :

Ils sont reconnaissables à la somme de tous leurs chiffres :
- Les entiers **divisibles par 3** sont les nombres dont la **somme** de tous les chiffres est elle-même divisible par **3** ;
- Les entiers **divisibles par 9** sont les nombres dont la **somme** de tous les chiffres est elle-même divisible par **9** ;

Exemples :
1. 8 704 698 est divisible par 3 mais non divisible par 9 car le somme de ses chiffres est :
   $8+7+0+4+6+9+8=42$ or 42 est dans la table de 3 mais pas dans la table de 9.
2. 311 n'est ni dans la table de 3, ni dans la table de 9 car $3+1+1=5$ et n'est ni dans la table de 3 ni dans la table de 9.

Exercices :
1. Prouver que 118 218 est dans la table de 3 mais pas dans la table de 9
2. Trouver un nombre qui est à la fois dans la table de 9 et dans la table de 3.

3) Propriété : Les entiers divisibles par 4 :

Les nombres entiers divisibles par 4 sont ceux dont les deux derniers chiffres forment un nombre lui-même divisible par 4.

Exemples :
1. 8 704 636 est divisible par 4 car 36 est dans la table de 4.
2. 747 n'est pas dans la table de 4 car 47 n'est pas dans la table de 4.

Exercice :
Trouver tous les entiers divisibles par 4, compris entre 1028 et 1054.

4) Exemple rédigé : Déterminer tous les diviseurs d'un nombre :

Enoncé : Déterminer tous les diviseurs de 48.

Solution :
Pour déterminer tous les diviseurs de 48, on teste si 48 est divisible par chacun des nombres entiers dans l'ordre croissant : 1, 2, 3, …

$48=\mathbf{1}\times\mathbf{48}$
$48=\mathbf{2}\times\mathbf{24}$
$48=\mathbf{3}\times\mathbf{16}$
$48=\mathbf{4}\times\mathbf{12}$
Non divisible par 5
$48=\mathbf{6}\times\mathbf{8}$
Non divisible par 7 ⟵ On s'arrête avant de tester le nombre 8, car 8 est déjà écrit dans la colonne de droite.

On trouve ainsi les diviseurs de 48 « deux par deux » :
$\mathbf{1}$; $\mathbf{2}$; $\mathbf{3}$; $\mathbf{4}$; $\mathbf{6}$; $\mathbf{8}$; $\mathbf{12}$; $\mathbf{16}$; $\mathbf{24}$; $\mathbf{48}$.

Exercice :
Déterminer tous les diviseurs de 45.

III) Décomposition d'un nombre en facteurs premiers :

1) Définition : Nombre premier :

Un **nombre premier** est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples :
1. 11 est un nombre premier, s'est seuls diviseurs positifs sont 1 et 11.
2. 14 **N'**est **PAS** un nombre premier car 7 divise 14. Il existe donc un autre entier positif que 1 et 14 qui divise 14.
3. Début de la liste des nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, …
   Mais le nombre 1 **N'**est **PAS** premier, car il n'a qu'un seul diviseur : 1.

Exercices :
1. Trouver 3 nombres premiers non cités dans la liste de l'exemple ci-dessus.
2. Justifier que 99 n'est pas un nombre premier.

2) Propriété :

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 peut se décomposer en un produit de facteurs premiers.
Cette décomposition est unique.

Exemples :
1. $42 = 2 \times 3 \times 7$.
2. $300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5^2$.

Exercices :
Décomposer 120 en produit de facteurs premiers.

3) Exemple rédigé : Décomposer tous les diviseurs d'un nombre :

Enoncé : Décomposer 504 en un produit de facteurs premiers.

Solution :
On cherche le plus petit nombre premier qui divise le nombre 504, on fait la division de 504 par ce nombre premier et si le quotient obtenu est différent de 1, on recommence jusqu'à obtenir pour quotient 1.

$\begin{array}{r|l} \mathbf{504} & 2 \\ \hline 0 & \mathbf{252} \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} \mathbf{252} & 2 \\ \hline 0 & \mathbf{126} \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} \mathbf{126} & 2 \\ \hline 0 & \mathbf{63} \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} \mathbf{63} & 3 \\ \hline 0 & \mathbf{21} \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} \mathbf{21} & 3 \\ \hline 0 & \mathbf{7} \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} \mathbf{7} & 7 \\ \hline 0 & \mathbf{1} \end{array}$

$\mathbf{504} = 2 \times \mathbf{252}$ donc $504 = 2 \times \mathbf{252}$

$\mathbf{252} = 2 \times \mathbf{126}$ donc $504 = 2 \times 2 \times \mathbf{126}$

$\mathbf{126} = 2 \times \mathbf{63}$ donc $504 = 2 \times 2 \times 2 \times \mathbf{63}$

$\mathbf{63} = 3 \times \mathbf{21}$ donc $504 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times \mathbf{21}$

$\mathbf{21} = 3 \times \mathbf{7}$ donc $504 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times \mathbf{7}$

$\mathbf{504} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = \mathbf{2^3} \times \mathbf{2^3} \times \mathbf{7}$

On peut utiliser la disposition suivante :

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

Exercice :
Décomposer 165 en produit de facteurs premiers.

IV) Rendre une fraction irréductible :

1) Définition : Fraction irréductible :

Une fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si les nombres entiers a et b n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exemples :

1. $\frac{3}{7}$ est irréductible.
En effet, d'après le tableau suivant :

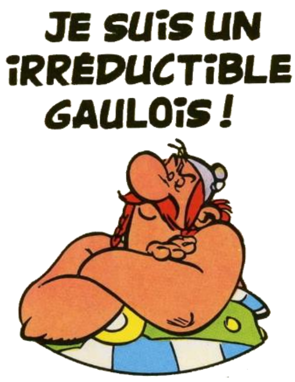
Nombre	Diviseurs
3	1 ; 3
7	1 ; 7

le seul diviseur de 3 et de 7 est 1.

2. $\frac{15}{25}$ n'est pas irréductible.
En effet, d'après le tableau suivant :

Nombre	Diviseurs
15	1 ; 3 ; 5
25	1 ; 5

15 et 25 possède deux diviseurs communs :
1 et 5.



Exercice :
Prouver que la fraction $\frac{125}{21}$ est irréductible.

2) Exemple rédigé : Rendre une fraction irréductible :

Enonce : Rendre la fraction $\frac{204}{72}$ irréductible.

Méthode :
Pour rendre une fraction irréductible, on décompose son numérateur et son dénominateur en un produit de facteurs premiers puis on simplifie cette fraction par tous les facteurs communs.

Solution :

- On décompose 204 et 72 en produits de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 204 & 2 \\ 102 & 2 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$204 = 2 \times 2 \times 3 \times 17 \qquad 72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

- $\frac{204}{72} = \frac{2\times2\times3\times17}{2\times2\times2\times3\times3} = \frac{17}{2\times3} = \frac{17}{6}$

Exercice :
Décomposer 165 en produit de facteurs premiers.