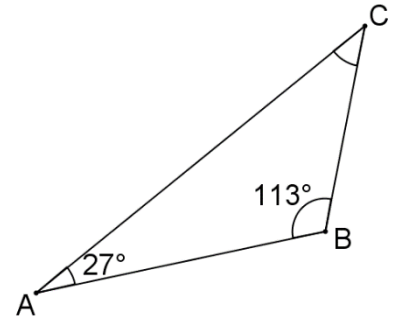


Chapitre 02 :
CALCUL LITTÉRAL :
IDENTITÉ REMARQUABLE ET
ÉQUATIONS PRODUIT NUL

I) Suppression de parenthèses :

1) Activité :

Calculer la mesure de l'angle \hat{C} en proposant deux suites d'opérations différentes mais donnant le même résultat.



1) Propriété : Parenthèses précédées d'un signe + :

Quand une paire de parenthèses est précédée par un signe « + » (et n'est pas suivie par un \times , un \div ou une puissance), il est possible de la supprimer en ajoutant tous les termes situés entre ces parenthèses.

Exemple :

Développer l'expression $A = 3 + (5 - 4)$

$$\begin{aligned} A &= 3 + (5 - 4) \\ &= 3 + 5 + (-4) \\ &= 3 + 5 - 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Exercice :

Développer l'expression $A' = 5 + (-4 + 7)$

$$\begin{aligned} A' &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

2) Propriété : Parenthèses précédées d'un signe - :

Quand une paire de parenthèses est précédée par un signe « - » (et n'est pas suivie par un \times , un \div ou une puissance), il est possible de la supprimer en retranchant tous les termes situés entre ces parenthèses.

Exemple :

Développer l'expression $B = 3 - (5 - 4)$

$$\begin{aligned} B &= 3 - (5 - 4) \\ &= 3 - 5 - (-4) \\ &= 3 + 5 + 4 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Exercice :

Développer l'expression $B' = 5 - (-4 + 7)$

$$\begin{aligned} B' &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

II) Distributivité simple : Le produit $k \times (a + b)$

1) Activité :

Calculer sans poser :

			Règle utilisée :
$17 \times 1001 =$	$14 \times 10\,001 =$	$2\,001 \times 7 =$	
$5 \times 99 =$	$6 \times 999 =$	$25 \times 996 =$	
$35 \times 7 + 35 \times 3 =$	$9 \times 16,5 - 9 \times 3,5 =$	$18 \times 4,4 + 18 \times 95,6 =$	

Remarque : Pour effectuer les calculs ci-dessus de tête, il est possible de recourir au calcul astucieux faisant intervenir des développements/factorisations.

2) Propriété : Distributivité simple : $k \times (a + b)$

Quels que soient les nombres relatifs a , b et k , on a l'égalité :

$$\underbrace{k \times (a + b)}_{\text{Produit}} = \underbrace{k \times a + k \times b}_{\text{Somme algébrique}}$$

Remarque :

Quand on transforme un produit en somme algébrique, on dit que l'on développe le produit.

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

Exemple :

Développer l'expression $C = -2(y + 7)$

$$\begin{aligned} C &= -2 \times (y + 7) \\ &= (-2) \times y + (-2) \times 7 \\ &= -2y - 14 \end{aligned}$$

Exercice :

Développer l'expression $C' = 5(2x - 8)$

Remarque :

Quand on transforme une somme algébrique en produit, on dit que l'on factorise la somme algébrique.

$$k \times a + k \times b = k \times (a + b)$$

Exemple :

Factoriser l'expression $D = -2y - 14$

$$\begin{aligned} D &= -2y - 14 \\ &= \underbrace{(-2)}_k \times \underbrace{y}_a + \underbrace{(-2)}_k \times \underbrace{7}_b \\ &= -2 \times (y + 7) \end{aligned}$$

Exercice :

Factoriser l'expression $D' = 15x - 10$

III) Double Distributivité : $(a + b) \times (c + d)$

1) Activité :

Rappel : Aire d'un rectangle = Longueur \times largeur = $L \times l$

L'aire du rectangle ABCD peut être calculé de deux manières :

<p>1.</p> <p>Aire du rectangle = Longueur \times largeur = $L \times l$ = $(\dots + \dots) \times (\dots + \dots)$</p>	<p>2.</p> <p>Aire du rectangle = Longueur \times largeur = $L_1 \times l_1 + L_2 \times l_2 + L_3 \times l_3 + L_4 \times l_4$ = $\dots \times \dots + \dots \times \dots + \dots \times \dots + \dots \times \dots$</p>
---	---

Remarque :

On en déduit que pour tous nombres a, b, c et d positifs, on a :

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

On admet que cette propriété reste vraie pour tous nombres relatifs a, b, c et d .

2) Propriété : Double distributivité simple : $(a + b) \times (c + d)$

Quels que soient les nombres relatifs a, b, c et d , on a l'égalité :

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

Exemple :

Développer l'expression $E = (3x + 2)(5y - 7)$

$$\begin{aligned}
 E &= (3x + 2) \times (5y + (-7)) = 3x \times 5y + 3x \times (-7) + 2 \times 5y + 2 \times (-7) \\
 &= 15xy - 21x + 10y - 14
 \end{aligned}$$

Exercice :

Développer l'expression $E' = (5x - 3)(4x + 9)$

IV) Identités remarquables : $(a + b)^2$; $(a - b)^2$; $(a + b)(a - b)$

1) Propriété : Première identité remarquable : $(a + b)^2$

Quels que soient les nombres relatifs a, b , on a l'égalité :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Exemple :

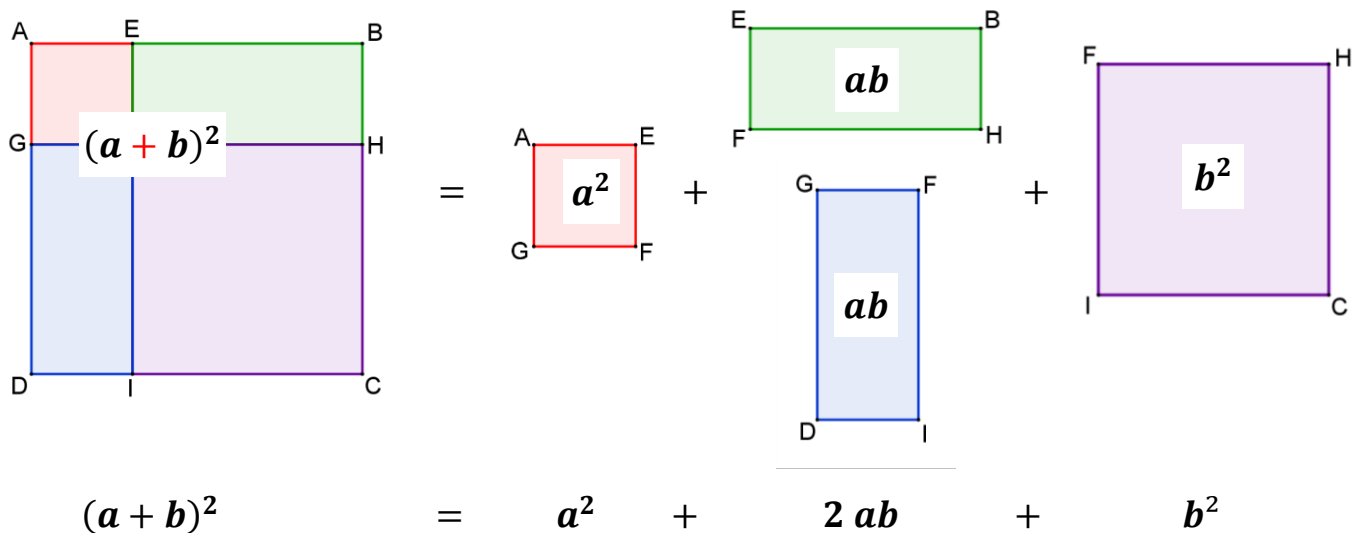
Développer l'expression $F = (3x + 5)^2$

Etape 1	$F = (3x + 5)^2$	On reconnaît la forme $(a + b)^2$
Etape 2	$F = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + 5^2$	On utilise l'identité remarquable : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 3x$ et $b = 5$
Etape 3	$F = 9x^2 + 30x + 25$	On réduit.

Démonstration par les aires lorsque a et b sont deux nombres positifs :

ABCD un carré composé :

- d'un carré AEFG de côté $a \rightarrow$ aire AEFG = AE \times AE = a^2 ;
- d'un carré FHCI de côté $b \rightarrow$ aire FHCI = FH \times FH = b^2 ;
- d'un rectangle EBHF \rightarrow aire EBHF = EF \times EB = ab ;
- d'un rectangle GFID \rightarrow aire GFID = GF \times GD = ab .



Démonstration par le calcul :

$$\begin{aligned}
 (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\
 &= a \times a + a \times b + b \times a + b \times b \\
 &= a^2 + ab + ba + b^2 \\
 &= a^2 + ab + ab + b^2 \\
 &= a^2 + 2ab + b^2
 \end{aligned}$$

Le carré d'un nombre est le nombre multiplié par lui-même.

On a développé en utilisant $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

La multiplication est commutative donc $ab = ba$

On réduit.

Exemple : Développer l'expression $F' = (6x + 3)^2$

2) Propriété : Première identité remarquable : $(a - b)^2$

Quels que soient les nombres relatifs a, b , on a l'égalité :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exemple :

Développer l'expression $G = (3x - 5)^2$

Etape 1	$G = (3x - 5)^2$	On reconnaît la forme $(a - b)^2$
Etape 2	$G = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2$	On utilise l'identité remarquable : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 3x$ et $b = 5$
Etape 3	$G = 9x^2 - 30x + 25$	On réduit.

Démonstration par le calcul :

On développe $(a - b)^2$

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a - b)(a - b) \\ &= a \times a + a \times (-b) - b \times a - b \times (-b) \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 \\ &= a^2 - ab - ab + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Le carré d'un nombre est le nombre multiplié par lui-même.
On a développé en utilisant $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
La multiplication est commutative donc $-ba = -ab$
On réduit.

Exercice : Développer l'expression $G' = (5x - 2)^2$

3) Propriété : Troisième identité remarquable : $(a + b)(a - b)$

Quels que soient les nombres relatifs a, b , on a l'égalité :

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Exemple :

Développer l'expression $H = (3x + 5)(3x - 5)$

Etape 1	$H = (3x + 5)(3x - 5)$	On reconnaît la forme $(a + b)(a - b)$
Etape 2	$H = (3x)^2 - 5^2$	On utilise l'identité remarquable : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ avec $a = 3x$ et $b = 5$
Etape 3	$H = 9x^2 - 25$	On réduit.

Démonstration par le calcul :

On développe $(a + b)(a - b)$

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a \times a + a \times (-b) + b \times a + b \times (-b) \\ &= a^2 - ab + ba - b^2 \\ &= a^2 - ab + ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

On a développé en utilisant $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
La multiplication est commutative donc $ba = ab$
On réduit en utilisant : $-ab + ab = 0$.

Exercice : Développer l'expression $H' = (9x + 4)(9x - 4)$

V) Factoriser à l'aide d'un facteur commun : $k \times a + k \times b$; $k \times a - k \times b$

1) **Propriété** : Facteur commun : $k \times a + k \times b$; $k \times a - k \times b$

Quels que soient les nombres relatifs a, b , on a l'égalité :

$$k \times a + k \times b = k \times (a + b)$$

$$k \times a - k \times b = k \times (a - b)$$

Exemples :

1. Factoriser l'expression $I = 3y + 21$

Etape 1	$I = 3y + 21$	On fait apparaître un facteur commun.
Etape 2	$I = 3 \times y + 3 \times 7$	On factorise.
Etape 3	$I = 3 \times (y + 7)$	

2. Factoriser l'expression $J = (9x - 4)(5x + 6) - (9x - 4)^2$

Etape 1	$J = (9x - 4)(5x + 6) - (9x - 4)^2$	On fait apparaître un facteur commun.
Etape 2	$J = (9x - 4)(5x + 6) - (9x - 4)(9x - 4)$	On factorise.
Etape 3	$J = (9x - 4)[(5x + 6) - (9x - 4)]$	On supprime les parenthèses à l'intérieur des crochets en faisant attention au signe « - »
Etape 4	$J = (9x - 4)[5x + 6 - 9x + 4]$	On réduit l'expression à l'intérieur des parenthèses
Etape 5	$J = (9x - 4)(-5x + 10)$	

Exercices :

- Factoriser l'expression : $I = 16x + 12$
- Factoriser l'expression : $J = (7x - 3)(3x + 2) - (3x + 2)^2$

VI) Factoriser à l'aide d'une identité remarquable : $a^2 + 2ab + b^2$; $a^2 - 2ab + b^2$; $a^2 - b^2$

1) **Propriété** : Identité remarquable : $a^2 + 2ab + b^2$; $a^2 - 2ab + b^2$; $a^2 - b^2$

Quels que soient les nombres relatifs a, b , on a les égalités :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Exemples :

1. Factoriser l'expression $K = 4x^2 + 12x + 9$

Etape 1	$K = 4x^2 + 12x + 9$	On fait apparaître les carrés.
Etape 2	$K = (2x)^2 + 12x + 3^2$	On identifie : $a = 2x$ et $b = 3$.
Etape 3	$K = (2x + 3)^2$	On utilise $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
Etape 4		On vérifie en redéveloppant : $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

2. Factoriser l'expression $L = 49x^2 - 42xy + 9y^2$

Etape 1	$L = 49x^2 - 42xy + 9y^2$	On fait apparaître les carrés.
Etape 2	$L = (7x)^2 - 42x + (3y)^2$	On identifie : $a = 7x$ et $b = 3y$.
Etape 3	$L = (7x - 3y)^2$	On utilise $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
Etape 4		On vérifie en redéveloppant : $(7x - 3y)^2 = 49x^2 - 42xy + 9y^2$

3. Factoriser l'expression $M = 64x^2 - 16$

Etape 1	$M = 64x^2 - 16$	On fait apparaître les carrés.
Etape 2	$M = (8x)^2 - 4^2$	On identifie : $a = 8x$ et $b = 4$.
Etape 3	$M = (8x - 4)(8x + 4)$	On utilise $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
Etape 4		On vérifie en redéveloppant : $(8x - 4)(8x + 4) = 64x^2 - 16$

Exercices :

1. Factoriser l'expression : $K' = x^2 + 6x + 9$
2. Factoriser l'expression : $L' = 25x^2 - 30x + 9$
3. Factoriser l'expression : $M' = 9x^2 - 4$