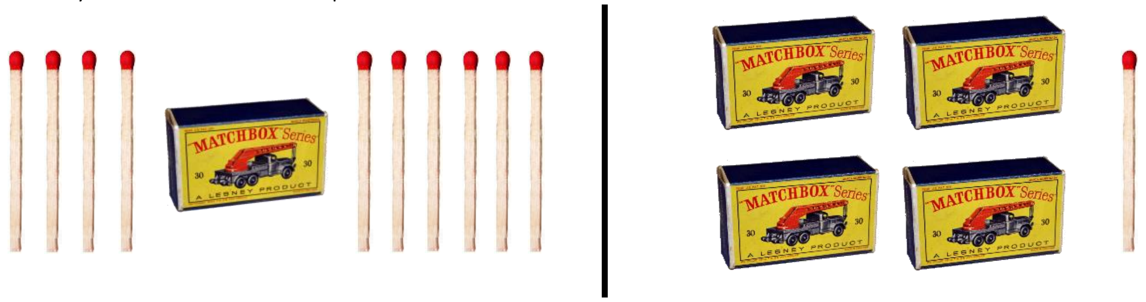
Chapitre 03 :

ÉQUATION ET INÉQUATIONS

0) Activité d'introduction :

Enoncé :
Sur les deux côtés de la table, il y a le même nombre d'allumettes.
Dans chaque boîte il y a le même nombre d'allumettes.
Combien y-a-t-il d'allumettes par boîte ?



I) Résolution d'une équation du premier degré :

1) Définition : Équation :

Une **équation** est une égalité dans laquelle intervient au moins un nombre inconnu, désigné(s) le plus souvent par une (ou plusieurs) lettre(s).
Cette égalité peut être vraie pour certaines valeurs de l'inconnue et fausse pour d'autres.

Exemple :
Le problème de l'activité d'introduction peut être traduit par l'équation mathématiques suivantes :

4 Allumettes + 1 × [Nbre d'allumettes dans une boîte] + 6 Allumettes = 4 × [Nbre d'allumettes dans une boîte] + 1 Allumette

En posant :
x = Nombre d'allumettes dans une boîte,
on obtient l'équation suivante :

$$4 + 1 \times \boxed{\;x\;} + 6 = 4 \times \boxed{\;x\;} + 1$$

Soit, après réduction :

$$10 + x = 4x + 1$$

$10 + x$ est appelé le membre de gauche de l'équation $10 + x = 4x + 1$,
$4x + 1$ est appelé le membre de droite de l'équation $10 + x = 4x + 1$.

Equation de Schrödinger :

$$H(t)\,|\,\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}\,|\,\psi(t)\rangle$$

Exercice :
Sur les deux côtés de la table, il y a le même nombre d'allumettes.
Dans chaque boîte il y a le même nombre d'allumettes.

Proposer une mise en équation du problème ci-dessus qui permettra, ultérieurement, de déterminer le nombre d'allumettes par boîte.

<u>2) Définitions :</u> Solution – Résoudre :

- Une **solution** de l'équation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vraie.
- **Résoudre** une équation, c'est en trouver toutes les solutions.

<u>Exemple :</u>

$x = 3$ est-il solution de l'équation $10 + x = 4x + 1$?

Pour répondre à la question, on procède en deux étapes :

1. On remplace x par 3 dans chacun des membres de l'équation :
   sans oublier de remettre les « × » lorsque c'est nécessaire

<u>Dans le membre de gauche on obtient :</u>	<u>Dans le membre de droite on obtient :</u>
$10 + x = 10 + 3$	$4x + 1 = 4 \times 3 + 1$
$= 13$	$= 13$

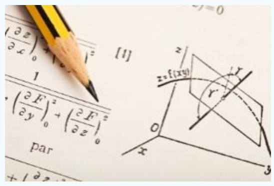
2. On compare les deux résultats.
   Ici, pour $x = 3$, le membre de gauche est égal au membre de droite.
   On en déduit que $x = 3$ est solution de l'équation $10 + x = 4x + 1$.

   Si on fait le lien avec l'énoncé de l'activité d'introduction,
   on peut affirmer que si il y a 3 allumettes dans chacune des boîtes,
   il y a le même nombre d'allumette sur le côté gauche de la table et sur le côté droit de la table.

<u>Exercice :</u>

$x = 8$ est-il solution de l'équation $5x - 3 = 2x + 6$?

<u>3) Méthode :</u> Résoudre algébriquement une équation de degré 1 :



Pour résoudre algébriquement une équation, on peut procéder en 3 étapes :

1. On regroupe les **variables**
2. On regroupe les **constantes**
3. On cherche la valeur de $\mathbf{1x}$

<u>Enoncé :</u>

Résoudre l'équation : $3x + 2 = -7x + 5$

<u>Résolution :</u>

<u>Propriété utilisée :</u>

$$3x + 2 = -7x + 5$$
$$3x + 2 + 7x = -7x + 5 + 7x \qquad (+7x)$$

1. On regroupe les variables

Propriété 1 :
Un égalité reste vraie quand on ajoute (ou soustrait) un même nombre aux deux membres.

$$10x + 2 = 5$$
$$10x + 2 - 2 = 5 - 2 \qquad (-2)$$

2. On regroupe les constantes

Propriété 1 :
Un égalité reste vraie quand on ajoute (ou soustrait) un même nombre aux deux membres.

$$10x = 3$$
$$x = \frac{3}{10} \qquad (\div 10)$$

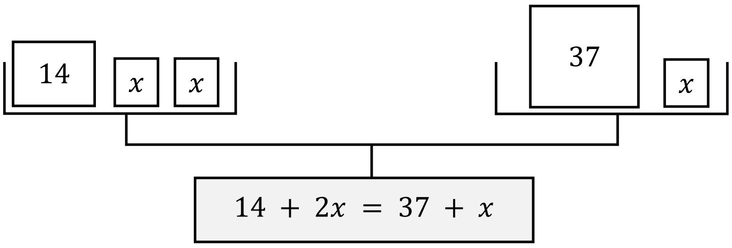
3. On cherche la valeur d'$1x$

Propriété 2 :
Un égalité reste vraie quand on multiplie (ou divise) un même nombre aux deux membres.

<u>Exercice :</u> Résoudre algébriquement l'équation $28x - 3 = 26x + 6$?

Remarque :

Les 2 membres d'une équation sont comme 2 plateaux d'une balance entre lesquels l'équilibre doit être conservé.



Pour garder l'équilibre, chaque opération sur l'un des plateaux doit être répercutée sur l'autre plateau.

II) Équation produit nul :

1) Propriété :

Si un produit est nul, alors l'un au moins de ses facteurs est nul.

Exemple 1 :

Résoudre l'équation :

$$x(2x+3)(x-1)=0$$

On a un produit (de 3 facteurs) nul donc l'un des facteurs est nul.

$x=0$ ou $2x+3=0$ ou $x-1=0$

$2x=-3$ $\quad$ $x=1$

$x=\frac{-3}{2}$

Il y a 3 solutions 0, $\frac{-3}{2}$ et 1 (facilement vérifiable dans l'équation de départ).

Exemple 2 :

Résoudre l'équation :

$4x^2=5x$

Pour résoudre cette équation, il est nécessaire de la ramener à une équation produit nul.

$4x^2=5x$

$4x^2-5x=0$

$x(4x-5)=0$

On a un produit (de 2 facteurs) nul donc l'un des facteurs est nul.

$x=0$ ou $4x-5=0$

$4x=5$

$x=\frac{5}{4}$

Il y a 2 solutions 0, $\frac{5}{4}$.

Exemple 3 :

Résoudre l'équation :

$(x+6)(3x+5)+(x+6)=0$

Le développement du 1er membre aboutirait à une équation du 2ème degré.

Pour résoudre cette équation avec les outils de 3ème, il est nécessaire de factoriser le premier membre grâce au facteur commune : $(x+6)$.

$(x+6)\times(3x+5)+(x+6)\times 1=0$

$(x+6)(3x+5+1)=0$

$(x+6)(3x+6)=0$

On a un produit (de 2 facteurs) nul donc l'un des facteurs est nul.

$x+6=0$ ou $3x+6=0$

$x=-6$ $\quad$ $3x=-6$

$x=\frac{-6}{3}=-2$

Il y a 3 solutions -6 et --2 (facilement vérifiable dans l'équation de départ).

Remarque :

Parfois, pour utiliser il est possible de factoriser grâce à une identité remarquable :

$25+4x^2=20x$

$25+4x^2-20x=0$

$(5-2x)^2=0$

$(5-2x)(5-2x)=0$

Exercice :

Résoudre les équations suivantes :

a. $(3x+4)\times(2x-5)=0$
b. $(2x-3)^2=0$
c. $3x\times(2x-1)=0$
d. $4x^2-3x=0$
e. $(2x-3)^2-(2x-3)(x+1)$

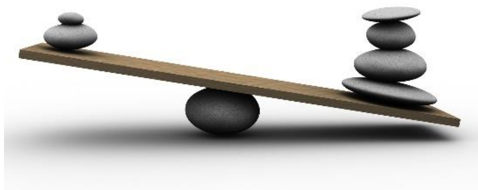
III) Résolution d'une inéquation du premier degré :

1) Définitions : Inéquation – Solution - Résoudre :

- Une **inéquation** est une inégalité dans laquelle intervient au moins un nombre inconnu, désigné(s) le plus souvent par une (ou plusieurs) lettre(s).
  Cette inégalité peut être vraie pour certaines valeurs de l'inconnue et fausse pour d'autres.
- Une **solution** d'une inéquation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'inégalité est vraie.
- **Résoudre** une inéquation, c'est ne trouver toutes les solutions.

Exemple :
On veut résoudre l'inéquation $2 + x \leq 8 + 2x$.

Pour $x = 3$:
$2 + x = 2 + 3 = 5$
$8 + 2x = 8 + 2 \times 3 = 8 + 6 = 14$
Aussi, $5 \leq 14$ donc l'inégalité est vérifiée.
3 est une solution de l'inéquation $2 + x \leq 8$.



Pour $x = -10$:
$2 + x = 2 + (-10) = -8$
$8 + 2x = 8 + 2 \times (-10) = 8 - 20 = -12$
Aussi, -8 n'est pas plus petit ou égal à (-12) donc l'inégalité est n'est pas vérifiée.
-10 n'est pas une solution de l'inéquation $2 + x \leq 8 + 2x$.

Exercice :
Trouver un nombre qui est solution de l'inéquation : $5x + 8 < 2x - 3$.
Trouver un nombre qui n'est pas solution de l'inéquation : $x + 7 \geq 3x - 14$

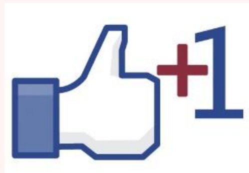
2) Propriété :

Une inégalité reste vraie lorsqu'on ajoute (ou soustrait) un **même** nombre **à chacun** de ses membres.

Mathématiquement :

Si $a \leq b$ alors $\begin{cases} a + k \leq b + k \\ a - k \leq b - k \end{cases}$

a, b et k désignent 3 nombres



Exemple 1 :
On veut résoudre l'inéquation $x - 7 \leq 2$.
On ajoute 7 à chacun de ses membres :

$$x - 7 \leq 2$$
$$\boxed{+7} \quad x - 7 + 7 \leq 2 + 7 \quad \boxed{+7}$$
$$x \leq 9$$

Donc tous les nombres inférieurs ou égaux à 9 sont les solutions de cette inéquation.

Exemple 2 :
On veut résoudre l'inéquation $5 + x > 1$.
On soustrait 5 à chacun de ses membres :

$$5 + x > 1$$
$$\boxed{-5} \quad 5 + x - 5 > 1 - 5 \quad \boxed{-5}$$
$$x > -4$$

Donc tous les nombres strictement supérieurs à -4 sont les solutions de cette inéquation.

Exercices :
Résoudre les inéquations :
$a.$ $x + 8 < -3$.
$b.$ $x + 7 \geq 14$

3) Propriété :

On peut multiplier (ou diviser) les deux membres d'une inéquation par un même nombre non nul à condition de :

ne pas changer le sens de l'inégalité si ce nombre est positif :	changer le sens de l'inégalité si le nombre est négatif.
Mathématiquement :	**Mathématiquement :**
Si $a \leq b$ et $\boldsymbol{k} > 0$ alors $a \times \boldsymbol{k} \leq b \times \boldsymbol{k}$ et $\frac{a}{\boldsymbol{k}} \leq \frac{b}{\boldsymbol{k}}$	Si $a \leq b$ et $\boldsymbol{k} < 0$ alors $a \times \boldsymbol{k} \geq b \times \boldsymbol{k}$ et $\frac{a}{\boldsymbol{k}} \geq \frac{b}{\boldsymbol{k}}$

a, b et k désignent 3 nombres avec $\boldsymbol{k} \neq 0$.

Exemple 1 :
On veut résoudre l'inéquation $\frac{x}{4} > -1$.

On multiplie chacun de ses membres par 4.
4 étant un nombre positif, on ne change pas le sens de l'inégalité.

$$\begin{aligned} &\frac{x}{4} > -1 \\ \times 4 \qquad & x > -1 \times 4 \qquad \times 4 \\ & x > -4 \end{aligned}$$

Tous les nombres strictement supérieurs à -4 sont solutions l'inéquation : $\frac{x}{4} > -1$.

Exemple 2 :
On veut résoudre l'inéquation $-3x \leq 18$.

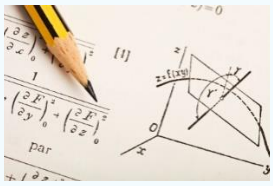
On divise chacun de ses membres par $\mathbf{-3}$.
$\mathbf{-3}$ étant un nombre négatif, on change le sens de l'inégalité.

$$\begin{aligned} & -3x \leq 18 \\ \div(-3) \qquad & \frac{-3}{-3}x \geq \frac{18}{-3} \qquad \div(-3) \\ & x > \mathbf{-6} \end{aligned}$$

Tous les nombres supérieurs ou égaux à **-6** sont solutions de l'inéquation : $-3x \leq 18$.

Exercices : Résoudre les inéquations : $a. \quad -5x > 15$. $\qquad b. \quad \frac{x}{3} \leq 7$.

4) Méthode : Résoudre algébriquement une inéquation de degré 1 :



Pour résoudre algébriquement une inéquation, on peut procéder en 3 étapes :

1. On regroupe les **variables**
2. On regroupe les **constantes**
3. On cherche la valeur de $\mathbf{1}\boldsymbol{x}$ (en changeant le sens de l'inégalité si nécessaire)

Enoncé :
Résoudre l'équation : $3x + 2 > 7x + 5$

Résolution :

$$\begin{aligned} & 3x + 2 > 7x + 5 \\ -7x \qquad & 3x + 2 - 7x > 7x + 5 - 7x \qquad -7x \end{aligned}$$

1. On regroupe les variables

$$\begin{aligned} & -4x + 2 > 5 \\ -2 \qquad & -4x + 2 - 2 > 5 - 2 \qquad -2 \end{aligned}$$

2. On regroupe les constantes

$$\begin{aligned} & -4x > 3 \\ \div(-4) \qquad & x < \frac{3}{-4} \qquad \div(-4) \end{aligned}$$

3. On cherche la valeur d'$1x$

Propriété utilisée :

Propriété :
Un inégalité reste vraie quand on ajoute (ou soustrait) un même nombre aux deux membres.

Propriété :
Un inégalité reste vraie quand on multiplie (ou divise) un même nombre aux deux membres.

Propriété 3 :
Une inégalité change de sens lorsqu'on divise chacun de ses membres par un nombre négatif.

Exercice : Résoudre algébriquement l'inéquation $8x + 14 = 26x - 6$?