Chapitre 05 :
FONCTIONS LINÉAIRES

I) Fonction linéaire et propriétés :

1) Définition – Propriété : Fonction linéaire :

A **toute situation de proportionnalité** de coefficient de proportionnalité $\boldsymbol{a}$, on peut associer une fonction f qu'on appelle fonction linéaire définie pour tout x par :

$$f : x \mapsto \boldsymbol{a}\, x$$

On dit que cette situation de proportionnalité est modélisée par la fonction f.

Exemple :

Tableau de valeurs :

SMS	1	2	5	x
Prix en €	0,05	0,1	0,25	0,05 x

× 0,05

Dans cet exemple, le prix payé est proportionnel au nombre de SMS envoyés.

Le coefficient de proportionnalité qui lie le nombre de SMS envoyés au Prix à payer en € est : 0,05.

Définition de la fonction :

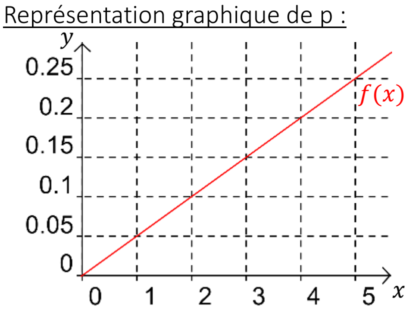
La fonction linéaire p définie par :

$$p : x \mapsto \mathbf{0,05}\, x$$

Permet de modéliser le prix à payer en fonction du nombre de SMS envoyés.

L'égalité $p(5) = 0{,}25$ signifie, pour cette situation, que le prix à payer pour 5 SMS est de 0,25 €.

Représentation graphique de p :



Exercice :

Une voiture consomme 5L pour faire 100 km.
On appelle f, la fonction qui au nombre de L consommés associe le nombre de km parcourus par la voiture.
Proposer un tableau de valeurs de la fonction, son expression algébrique et une représentation graphique.

Remarque :

Une fonction est linéaire si l'image d'un nombre s'obtient en multipliant le nombre de départ par un nombre fixé.

2) Propriété :

Si f est une fonction linéaire de coefficient $\boldsymbol{a}$, alors :

$$f(0) = 0$$
$$f(1) = \boldsymbol{a}$$

Exemple :

Dans l'exemple précédent :

le prix à payer pour 0 SMS est de 0 € : $p(0) = 0$
le prix à payer pour 1 SMS est de 1 € : $p(1) = 0{,}05$

3) Propriété :

Si f est une fonction linéaire de coefficient $\boldsymbol{a}$, alors pour tous nombres x, x' et k, on a :

(1) $f(x + x') = f(x) + f(x')$

(2) $f(\boldsymbol{k} \times x) = \boldsymbol{k} \times f(x)$

Exemple :

1. Dans l'exemple précédent :

le prix à payer pour 2 SMS est de 0,10 €	:	$p(2) = 0{,}10$ €
+ le prix à payer pour 3 SMS est de 0,15 €	:	$p(3) = 0{,}15$ €
le prix à payer pour 2 SMS est de 0,25 €	:	$p(5) = 0{,}25$ €

$\Rightarrow$ **(1)** $p(5) = p(2) + p(3)$

2. Dans l'exemple précédent :

le prix à payer pour 3 SMS est de 0,10 €	:	$p(3) = 0{,}15$ €
le prix à payer pour 6 SMS est de 0,15 €	:	$p(6) = 0{,}30$ €

$\Rightarrow$ **(2)** $p(6) = p(2 \times 3) = 2 \times p(3)$

4) Démonstration :

Soit f une fonction linéaire de coefficient $\boldsymbol{a}$,

f est définie pour tout x par :

$$f : x \mapsto \boldsymbol{a}\, x$$

On obtient :

(1) $f(x + x') = a \times (x + x') = a \times x + a \times x' = f(x) + f(x')$

(2) $f(\boldsymbol{k} \times x) = a \times (\boldsymbol{k} \times x) = \boldsymbol{k} \times (a \times x) = \boldsymbol{k} \times f(x)$

II) Fonction linéaire et représentation graphique :

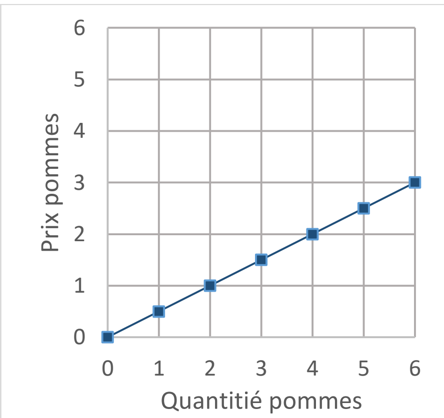
1) Propriété :

Si une fonction est linéaire alors sa représentation graphique est une droite passant par l'origine.

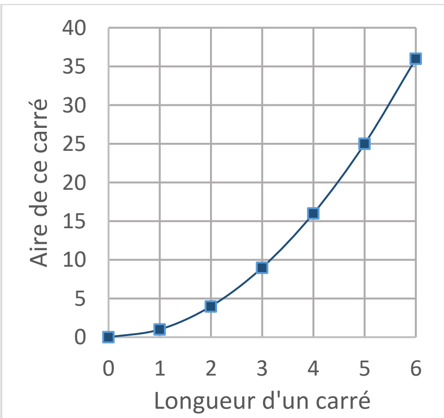
Réciproquement :

Si une fonction est représentée par une droite passant par l'origine, alors elle est linéaire.

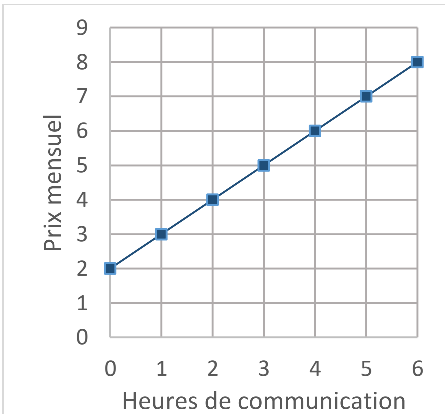
Exemples :



Ce graphique représente une fonction linéaire (et donc de proportionnalité), car les points sont alignés avec l'origine du repère.



Ce graphique NE représente PAS une fonction linéaire car les points ne sont pas alignés.



Ce graphique NE représente PAS une fonction linéaire car les points ne sont pas alignés avec l'origine du repère.

2) Méthode : Lecture du coefficient directeur d'une fonction linéaire sur un graphique :

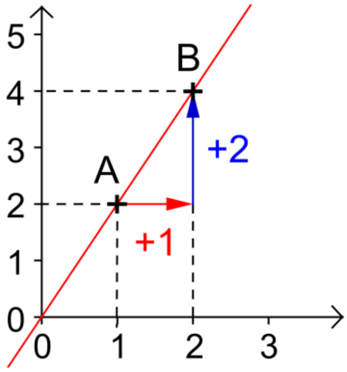
Pour déterminer le coefficient directeur d'une fonction linéaire par lecture graphique, il faut déterminer le nombre $\boldsymbol{a}$ tel que :

$$f(x+1) = f(x) + \boldsymbol{a}$$

Cette relation se traduit par : si l'on augmente l'abscisse de ***1****, alors l'ordonnée augmente de* $\boldsymbol{a}$.

Exemple :

1. Coefficient directeur positif : $\boldsymbol{a > 0}$

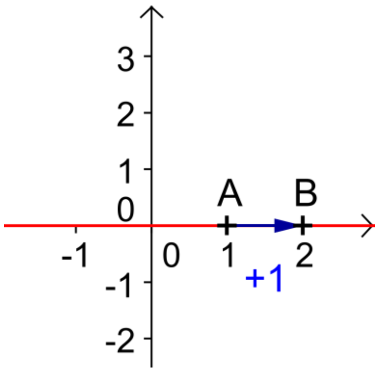


Lorsque l'on augmente l'abscisse du point A de 1, l'ordonnée du point A augmente de 2.

Le coefficient directeur de la fonction linéaire représentée ci-dessus est 2.

On obtient : $f(x) = 2x$

2. Coefficient directeur positif : $\boldsymbol{a = 0}$

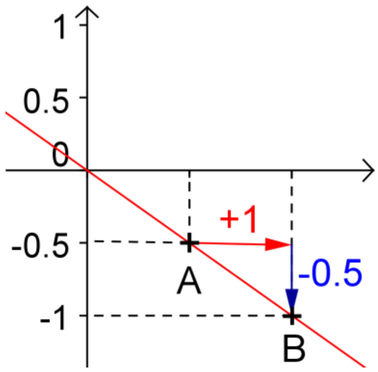


Lorsque l'on augmente l'abscisse du point A de 1, l'ordonnée du point A reste inchangé.

Le coefficient directeur de la fonction linéaire représentée ci-dessus est 0.

On obtient : $f(x) = 0x = 0$.

3. Coefficient directeur négatif : $\boldsymbol{a < 0}$



Lorsque l'on augmente l'abscisse du point A de 1, l'ordonnée du point A augmente de 2.

Le coefficient directeur de la fonction linéaire représentée ci-dessus est $(-0{,}5)$.

On obtient : $f(x) = (-0{,}5)x$.

III) Fonction linéaire et pourcentages :

1) Propriété :

Appliquer un pourcentage de $\boldsymbol{t}$ % revient à calculer l'image de la fonction linéaire f telle que :

$$f : x \mapsto \frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{100}}\ x$$

Exemple :

La pâte à tartiner Nutello est composée de 60% d'huile de palme et de sucre.
La fonction qui permet de calculer la quantité d'huile de palme et de sucre en fonction de la masse d'un pot est donnée par :

$$f : x \mapsto \frac{\boldsymbol{60}}{\boldsymbol{100}}\ x \qquad \text{Soit : } f : x \mapsto \boldsymbol{0,60}\ x$$

Exercice :

Proposer un tableau de valeurs de la fonction ainsi qu'une représentation graphique.

2) Définition :

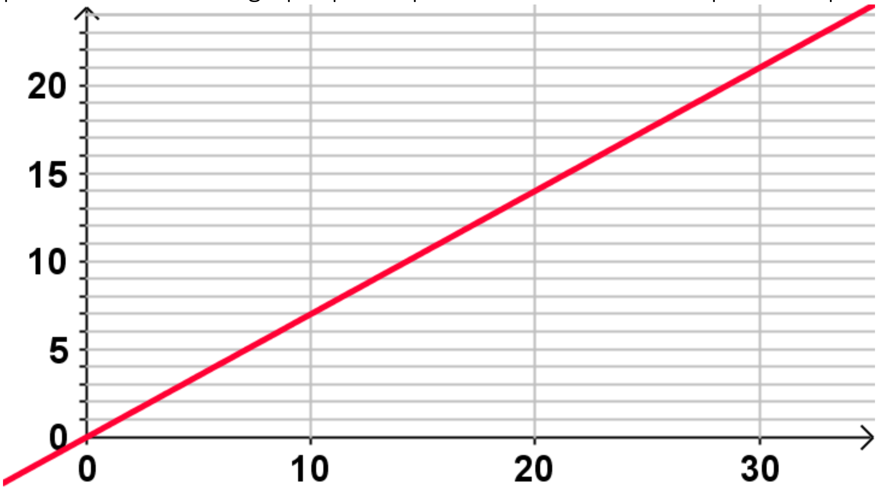
Augmenter un nombre de t % revient à multiplier par $1 + \frac{t}{100}$,
la fonction linéaire associée est $f : x \mapsto \left(1 + \frac{t}{100}\right) x$.

Diminuer un nombre de t % revient à multiplier par $1 - \frac{t}{100}$,
la fonction linéaire associée est $f : x \mapsto \left(1 - \frac{t}{100}\right) x$.

Exemple :

Durant les soldes, le gérant d'un magasin décide de baisser l'ensemble des prix de 30%.
Cela revient à multiplier l'ensemble des prix non soldés par $\left(1 - \frac{30}{100}\right)$, soit 0,70.

L'expression linéaire :
$f : x \mapsto 0{,}70\, x$
permet de tracer un graphique du prix soldé en fonction du prix de départ :



Exercice :

En s'aidant du graphique, déterminer le prix remisé d'un article coûtant 20€.