Chapitre 06 :
PROPORTIONNALITÉ

I) Vocabulaire :

1) Définition : Situation de proportionnalité :

En mathématiques, on dit que deux grandeurs sont **proportionnelles** lorsque les valeurs de l'une s'obtiennent en **multipliant** (ou en **divisant**) les valeurs de l'autre par un **même nombre** non nul.

Ce nombre est appelé **coefficient de proportionnalité**.

Exemple :

Sur la devanture d'une boulangerie, on peut lire :

1 Baguette = 1,10 €

3 Baguettes achetées, 1 offerte

Cette situation NE relève PAS d'une situation de proportionnalité.

En effet :

1 Baguette $\xrightarrow{\times 1,10\ €}$ 1,10 €

2 Baguettes $\xrightarrow{\times 1,10\ €}$ 2,20 €

3 Baguettes $\xrightarrow{\times 1,10\ €}$ 3,30 €

4 Baguettes $\xrightarrow{\cancel{\times 1,10\ €}}$ 3,30 €

Exercice :

https://natachacreative.com/cuisine/barre-tendre/

Pour réaliser 10 « barres tendres », il faut :

INGRÉDIENTS

INGRÉDIENTS SECS
- 2 tasses d'avoine
- 1 tasse de noix de coco non sucrée
- 1 tasse de graines de citrouille
- ½ tasse d'amandes en bâtonnets
- ½ tasse de graines de lin
- ½ tasse de pacanes
- ½ tasse de pépites de chocolat noir

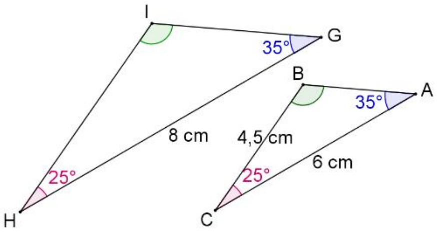
MÉLANGE HUMIDE
- 3 c. à table de beurre
- ¼ tasse de sirop d'érable
- ½ tasse de miel
- 3 c. à table de cassonade
- 1 c. à thé de vanille
- ¼ c. à thé de sel

Adapter la recette pour 20 « barres tendres ».

2) Définition : Tableau de proportionnalité :

Une situation de proportionnalité peut être présentée dans un tableau (appelé **tableau de proportionnalité**) dans lequel on précise les grandeurs proportionnelles et les unités utilisées.

Exemple :



Le triangle IGH est l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre E et de rapport 1,5, les longueurs respectives ont donc été multipliées par 1,5. On obtient :

× E

6 cm	4,5 cm
8 cm	IH

$\times\frac{4}{3}$ $\times\frac{4}{3}$

On trouve HF = 4,5 × $\frac{4}{3}$ = 6 cm.

3) Définition : Quatrième proportionnelle :

Lorsque dans deux colonnes d'un tableau de proportionnalité on connaît trois nombres, on peut calculer le quatrième.
On l'appelle la quatrième proportionnelle.

Connu	Connu
Connu	?

Exemple :
Si l'on considère le tableau de l'exemple précédent,
IH est la quatrième proportionnelle.

6 cm	4,5 cm
8 cm	IH

4) Propriété : Produit en croix :

Dans un tableau de proportionnalité, **les produits en croix** sont égaux.

Concrètement :
On considère a, b, c et d quatre nombres tels que c et d soient non nuls.

Si

a	b
c	d

est un tableau de proportionnalité, alors : $\boxed{a \times d = c \times d}$

Exemple :
Dans le tableau de proportionnalité ci-contre :
- $8{,}2 \times 39{,}5 = 323{,}9$
- $41 \times 7{,}9 = 323{,}9$

Les deux produits en croix sont bien égaux.

$8,2$	$7,9$
41	39,5

× 5

Remarques :
1. La réciproque reste vraie : Si $\boxed{a \times d = c \times d}$, alors

a	b
c	d

est un tableau de proportionnalité.

2. Démonstration disponible à l'adresse suivante :
http://pedagogie.ac-toulouse.fr/math/stages/college/quatrieme_06_07/calcul/word/demonstration_produits_en_croix.doc

II) Déterminer un quatrième proportionnelle :

1) Méthode : Compléter un tableau de proportionnalité.

Pour déterminer **une quatrième proportionnelle**, on choisit le plus simple selon l'énoncé.

Exemple :
Sur une carte, 2 cm représentent 12 km.
Calculer la distance réelle représentée par 3 cm.

Pour déterminer la distance réelle représentée par 3 cm sur la carte, il est possible d'utiliser plusieurs méthodes :

1. **En utilisant le coefficient de linéarité :**

   Pour 2 cm, on a 12 km.

   Comme $3 = 2 \times \frac{3}{2}$, la distance réelle correspondante à 3 cm sur la carte est de $12 \times \frac{3}{2} = 18$ km.

Distance sur la carte en cm	*2*	*3*
Distance réelle en km	*12*	*...*

2. **En utilisant le coefficient de proportionnalité :**

   Pour 2 cm, on a 12 km.

   Pour obtenir 12 à partir de 2, il faut multiplier 2 par 6.

   Pour calculer la distance réelle correspondante à 3 cm, il suffit de multiplier 3 par 6.

   6 est appelé le coefficient de proportionnalité qui lie la distance sur la carte à la distance réelle.

Distance sur la carte en cm	*2*	*3*
Distance réelle en km	*12*	*...*

3. **En utilisant « la règle de trois » (passage par l'unité) :**

   Pour 2 cm, on a 12 km.

   Pour 1 cm, on a 2 fois moins, soit 6 km.

   On en déduit que pour 3 cm, on a 6 × 3 = 18 km.

Distance sur la carte en cm	*2*	*1*	*3*
Distance réelle en km	*12*	*12÷2*	*6×3*

4. **En ajoutant les nombres de deux colonnes pour obtenir la valeur de la troisième :**

Distance sur la carte en cm	*2*	*1*	*3*
Distance réelle en km	*120*	*60*	*120+60*

5. **En utilisant l'égalité des produits en croix :**

   Comme le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité,

Distance sur la carte en cm	*2*	*3*
Distance réelle en km	*120*	x

les produits en croix sont égaux.

On en déduit que :

$2 \times x = 3 \times 120$

$2x = 360$

$x = \dfrac{360}{2} = 180.$

III) Représentations graphiques et proportionnalité :

1) Propriétés :

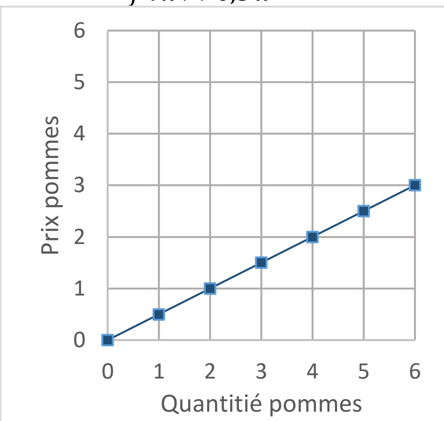
Une **situation de proportionnalité** est représentée graphiquement dans un repère par des points alignés avec l'origine du repère.

Réciproquement :

Si une situation est représentée graphiquement par des points alignés avec l'origine du repère, alors c'est une situation de proportionnalité.

Exemples :

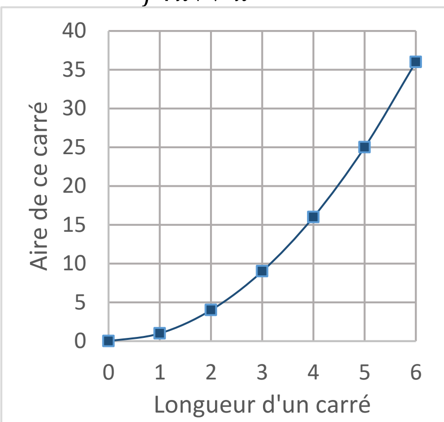
Soit f la fonction définie pour tout nombre réel par :
$f : x \mapsto 0{,}5\,x$



Ce graphique représente une situation de proportionnalité car les points sont alignés avec l'origine du repère.

La fonction f est une fonction linéaire.

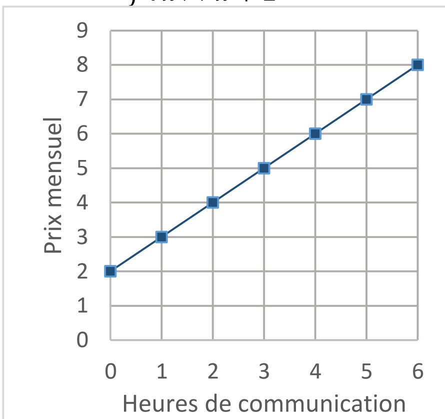
Soit f la fonction définie pour tout nombre réel par :
$f : x \mapsto x^2$



Ce graphique NE représente PAS une situation de proportionnalité car les points ne sont pas alignés.

La fonction f n'est ni linéaire, ni affine.

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel par :
$f : x \mapsto x + 2$



Ce graphique NE représente PAS une situation de proportionnalité car les points ne sont pas alignés avec l'origine du repère.

La fonction f est affine.

IV) Grandeurs composées :

1) Définition : Grandeur quotient :

Une **grandeur quotient** est une grandeur obtenue en effectuant le quotient de deux gradeurs.

Exemple :

La vitesse moyenne d'un mobile est la distance parcourue pendant une unité de temps.

Elle s'exprime en km/h par le quotient de deux grandeurs :
- la longueur du parcours (en km),
- la durée de ce parcours (en h).

Un véhicule roulant à une vitesse constante égale à 120 km/h parcourt ainsi 120 km en une heure.

2) Définition : Grandeur produit :

Une **grandeur produit** est une grandeur obtenue en effectuant le produit de deux grandeurs.

Exemples :

L'énergie (en Wh) s'exprime par le produit de deux grandeurs :

- la puissance de l'appareil (en W),
- la durée d'utilisation de cet appareil (en h).

Un appareil de puissance de 2200 W utilisé pendant 3h consomme ainsi une énergie égale à 300 Wh.

V) Pourcentages :

1) Propriété :

Un pourcentage de t % traduit une situation de proportionnalité de coefficient $\frac{t}{100}$.

Donc appliquer un taux de t % revient à multiplier par $\frac{t}{100}$.

Exemple :

Juin 2016, il y avait 81 élèves au collège de Gerstheim. Environ 88,7 % de ces élèves ont eu leur brevet. 28,4% ont eu leur brevet avec une mention TB, 13,5% avec une mention B et 15 avec une mention AB. Calculer le nombre d'élève ayant eu leur brevet.

Pour calculer le nombre d'élèves ayant eu leur brevet, on peut utiliser la propriété précédente :

$$81 \times \frac{88{,}7}{100} \approx 72.$$

On en déduit que 72 élèves ont eu leur brevet.

Exercice :

Calculer le nombre d'élèves ayant eu une mention TB puis B.

2) Définition :

Augmenter un nombre de t % revient à multiplier par $1 + \frac{t}{100}$.

Diminuer un nombre de t % revient à multiplier par $1 - \frac{t}{100}$.

Exercice 1 :

Les tarifs d'une compagnie d'énergie augmentent de 9 %. La famille Martin payait une facture annuelle de 570 €.

Avec le nouveau tarif, elle payera donc :

$570 \text{ €} \times \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{100}}\right) = 570 \text{ €} \times \mathbf{1{,}09} = 621{,}30 \text{ €}$

Exercice 2 :

Dans un magasin, lors des soldes, on diminue tous les prix de 35 %.
Le prix d'un pantalon était de 55€.

Son nouveau prix est donc de :

$$55 \text{ €} \times \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{35}}{\mathbf{100}}\right) = 55 \text{ €} \times \mathbf{0{,}65} = 35{,}75 \text{ €}$$