Chapitre 07B :
PROBABILITÉS

I) Expérience aléatoire :

1) Définitions : Expérience aléatoire – Issue :

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les résultats, non tous identiques, sont prévisibles mais dont on ne connaît pas à l'avance lequel va se produire.

Les résultats possibles de l'expérience sont appelés **issues**.

Exemple :

On effectue l'expérience suivante :

«On lance un dé à 6 faces et on note le nombre de points inscrits sur sa face supérieure. »

Cette **expérience** admet **6 issues** : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
Le résultat de l'expérience est uniquement dû au hasard, il s'agit d'une **expérience aléatoire.**

Exercice :

Proposer une autre expérience aléatoire dont on précisera les issues possibles.

2) Propriété :

Lorsqu'on répète une expérience aléatoire, le résultat ne dépend pas des résultats des expériences réalisées précédemment.

Exemple :

Bien qu'ayant lancé 4 fois de suite un dé à 6 faces et ayant obtenu un nombre pair à chaque lancer, il n'est pas possible de déterminer si l'on obtiendra un nombre pair au prochain lancer : le 5ème lancer peut aboutir à un nombre pair ou impair.

3) Définitions : Evénement – Evénement élémentaire :

Un **événement** est une condition qui, selon l'issue de l'expérience aléatoire, est réalisée ou non. Il peut être constitué d'aucune, d'une ou de plusieurs issues de l'expérience.

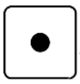
Un **événement élémentaire** est un événement constitué d'une seule issue.

Exemple :

On considère :

l'événement A : «On a obtenu un quatre »
l'événement B : «On a obtenu un nombre impair »
l'événement C : «On a obtenu un sept »

L'événement A est constitué de la seule issue : « 4 » : 
L'événement A est un événement élémentaire.

L'événement B est constitué de trois issues : « 1 », « 3 » et « 5 » : ,  et .
L'événement B **N**'est **PAS** un événement élémentaire.

L'événement C **N**'est constitué d'**AUCUNE** issue.

Exercice :

Proposer 3 autres événements dont un élémentaire, un non élémentaire et un constitué d'aucune issue..

II) Probabilité d'un événement :

1) Propriété - Définition : Probabilité :

Lorsque l'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence à laquelle se réalise un événement se rapproche d'une « d'une fréquence théorique » appelée **probabilité**.

La probabilité d'un événement A se note $p(\text{A})$.

<u>Exemple :</u>
En lançant une pièce non truquée un très grand nombre de fois, on constate que l'on obtient « pile » quasiment une fois sur deux.

Autrement dit, la fréquence d'apparition de « pile est sorti » se rapproche de $\frac{1}{2}$.

On dit que la probabilité de l'événement « pile est sorti » est $\frac{1}{2}$ = 0,5.

On note : p(pile est sorti) = 0,5.

<u>Exercice :</u>
Donner la probabilité d'obtenir un nombre strictement supérieur à 4 lorsqu'on lance un dé de 6 faces parfaitement équilibré.

2) Propriété :

Une probabilité est un nombre **compris entre 0 et 1**.
Un événement dont la probabilité est nulle (égale à 0) est un **événement impossible**.
Un événement dont la probabilité est égale à 1 est un **événement certain**.
La **somme** des probabilités d'obtenir chaque issue est **égale à 1**.

<u>Exemples :</u>
Dans un jeu de carte classique de 32 cartes,

1. l'événement « tirer un as OU un trèfle » est réalisé lors d'une des 11 issues :
   - as de cœur,
   - as de pique,
   - as de carreau,
   - 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi de trèfle

   Il y a donc onze fois 1 chance sur 32 de tirer un as ou un trèfle, soit une probabilité de $\frac{11}{32}$.

   $0 \leq p$(tirer un as OU un trèfle) ≤ 1

2. l'événement « tirer un 2 » est impossible dans un jeu classique de 32 cartes.

   $p(2) = 0$

3. En lançant un dé de 6 faces,

   La probabilité de l'événement « obtenir un résultat inférieur à 7 » est de 1, c'est un événement certain.

   p(obtenir un résultat inférieur à 7) = $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$.

3) Définition : Equiprobabilité :

Pour expérience aléatoire, lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'il s'agit d'une situation d'**équiprobabilité** (même probabilité).

<u>Exemple :</u>
En lançant un dé de 6 faces, il y a autant de chance d'obtenir chacune des issues :

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = \frac{1}{6}.$$

Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

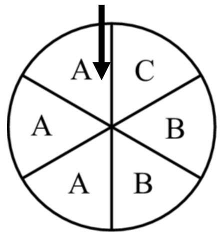
4) Propriété : Règle de Laplace :

Dans une situation **d'équiprobabilité**, la probabilité d'un événement A est égal au quotient :

$$p(\text{A}) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à l'événement A}}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

Exemple :

Sur la roue ci-contre, il y a 6 secteurs dont 3 avec l'inscription A. Chaque secteur angulaire est de la même taille.
Il y a donc autant de chance de tomber sur chacun des événements élémentaires.
La situation est une situation **d'équiprobabilité.**



Pour calculer la probabilité « Obtenir un A », on peut utiliser la règle de Laplace :

$$p(\text{A}) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à l'événement A}}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{3}{6}$$

Exercice : Calculer la probabilité « Obtenir un B ».

III) Evénements incompatibles :

1) Définition : Evénements incompatibles :

Deux événements qui ne peuvent pas se produire en même temps sont dits **incompatibles**.

Exemple :

En lançant une pièce, les événements :
A : « Obtenir pile » et B : « Obtenir face »
sont incompatibles :
il n'est pas possible d'obtenir à la fois pile et à la fois face.

Exercice :

On tire une carte d'un jeu de 54 cartes.
Proposer deux événements **non élémentaires incompatibles**.

2) Propriété :

Si deux événements A et B sont incompatibles, alors la probabilité que l'un **ou** l'autre se réalise est égale à la somme des probabilités de ces événements :

$$p(\text{A ou B est réalisé}) = p(\text{A}) + p(\text{B})$$

Exemple :

En lançant un dé équilibré de 6 faces numérotées de 1 à 6,
les événements :
A : « Obtenir un 1 » et B : « Obtenir un 6 »
sont incompatibles :
il n'est pas possible d'obtenir à la fois 1 et à la fois 6.

$$p(\text{A ou B est réalisé}) = p(\text{A}) + p(\text{B}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Exercice :

On lance un dé équilibré de 6 faces numérotées de 1 à 6,
et on considère les événements suivants :
C : « Obtenir un nombre pair » et D : « Obtenir un 5 »

Calculer, en justifiant, p(C ou D est réalisé).

3) Définition : Evénement contraire :

L'**événement contraire** d'un événement A est celui qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.
On le note : non A ou $\overline{\text{A}}$.

Exemple :

On lance un dé équilibré de 6 faces numérotées de 1 à 6.
On considère l'événement A : « Obtenir un 1 »

L'événement $\overline{\text{A}}$ est défini par :
« Obtenir n'importe quel nombre sauf un 1 ».

Il est composé de 5 issues : 2, 3, 4, 5 et 6.
On obtient : $p(\overline{\text{A}}) = \frac{5}{6}$.

Exercice :

On lance un dé équilibré de 6 faces numérotées de 1 à 6,
et on considère les événements suivants :
C : « Obtenir un nombre pair » et D : « Obtenir un 5 »

Calculer, en justifiant, p(C ou D est réalisé).

4) Propriété :

La somme des probabilités de A et de son contraire est égale à 1 :

$$p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) = 1$$

Autrement dit :

$$p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) = 1$$

Exemple :
En considérant les événements A et $\overline{\mathrm{A}}$ de l'exemple précédent, on obtient :

$p(\mathrm{A}) + p(\overline{\mathrm{A}}) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{6}{6} = 1$

ou encore :

$p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - p(\mathrm{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Exercice :
On lance un dé équilibré de 6 faces numérotées de 1 à 6, et on considère l'événements suivants :

C : « Obtenir un nombre strictement plus grand que 5 »

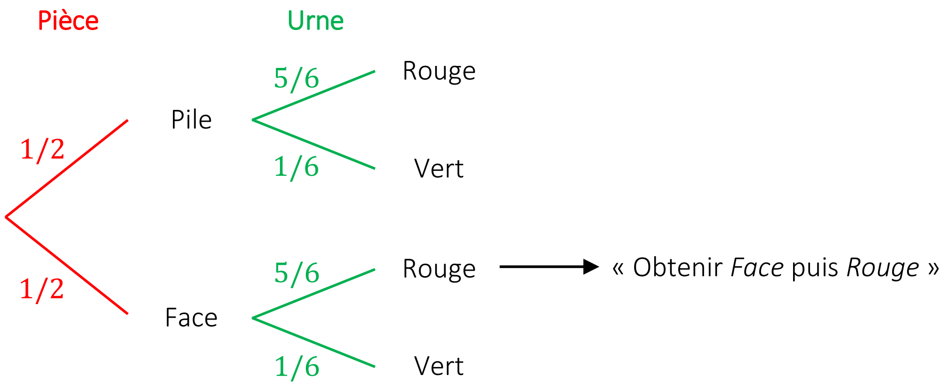
Calculer, en justifiant, $p(\overline{\mathrm{C}})$.

IV) Expériences aléatoires à deux épreuves :

1) Définition : Arbre de probabilité :

En probabilité élémentaire, un **arbre de probabilité pondéré** est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire connaissant des **probabilités conditionnelles**.

Exemple :
On lance une pièce de monnaie, puis on tire une boule d'une urne contenant 5 boules rouges et 1 boule verte.
On peut représenter cette expérience à deux épreuves à l'aide d'un **arbre pondéré**.



Exercice :
Faire un arbre de probabilité pondéré permettant de résumer le lancer successif de deux pièces de monnaie.

2) Propriété :

Dans un **arbre de probabilité pondéré**, la probabilité de l'événement auquel conduit un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

$$p(\text{A réalisé puis B réalisé}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B})$$

Exemple :
Dans l'exemple précédent,

p(Obtenir *Face*, puis *Rouge*) $= \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$

Exercice :
En s'aidant de l'arbre précédent,
calculer p(Obtenir *Pile*, puis Vert)