Chapitre 09 :
THÉORÈME DE THALÈS

I) Activités d'introduction :

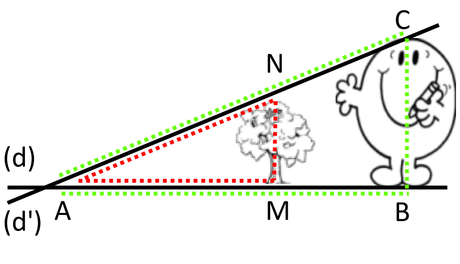
II) Théorème de Thalès :

1) Théorème : Théorème de Thalès : (Admis)

Si deux droites **parallèles** coupent deux droites **sécantes**,
alors elles déterminent deux **triangles** dont les côtés correspondants ont des longueurs **proportionnelles**.

Mathématiquement :
(MB) et (NC) se coupent en A,
Si les droites (BC) et (MN) sont **parallèles**, alors on a : $\frac{\boldsymbol{AM}}{\boldsymbol{AB}} = \frac{\boldsymbol{AN}}{\boldsymbol{AC}} = \frac{\boldsymbol{MN}}{\boldsymbol{BC}}$

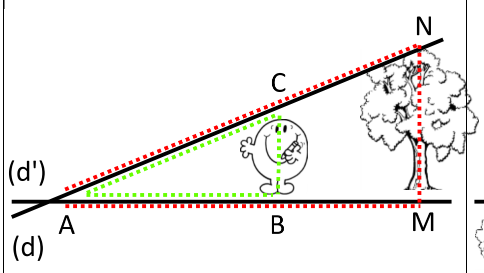
Configuration 1 :



Relation de Thalès :

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \boldsymbol{k} < 1.$

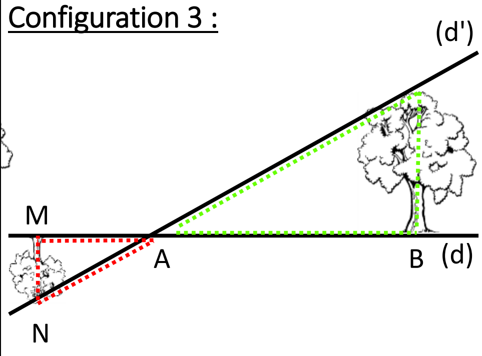
Configuration 2 :



Relation de Thalès :

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \boldsymbol{k} > 1.$

Configuration 3 :



Relation de Thalès :

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \boldsymbol{k}.$

Lorsque :
$\boldsymbol{k} < 1$, on dit que le triangle rouge ANM est une réduction de rapport $\boldsymbol{k}$ du triangle vert ABC.
$\boldsymbol{k} > 1$, on dit que le triangle rouge ANM est un agrandissement de rapport $\boldsymbol{k}$ du triangle vert ABC.

Remarque :
Il suffit de multiplier les longueurs des triangles verts par k pour obtenir les longueurs des triangles rouges.

III) Trois applications possibles du Théorème de Thalès :

1) Exercice rédigé : Calcul de longueur :

Enoncé :

Sur la figure ci-contre,

A ∈ (BM),

A ∈ (CN),

(BC) // (MN).

Calculer MN.

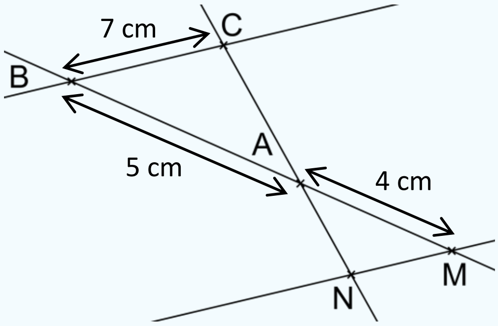
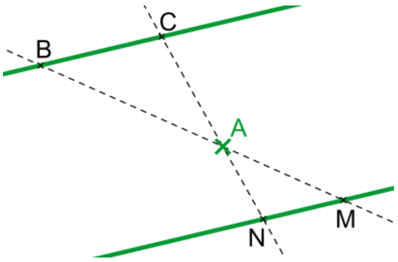


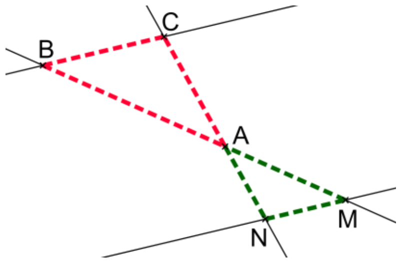
Schéma :

Données :



→ Théorème de Thalès →

Conclusions :



ANM est une réduction de ABC

Diagramme :

(MB) et (NC) se coupent en A

(MN) // (BC)

→ Théorème de Thalès → $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Rédaction :

Les droites (MN) et (NC) se coupent en A.
Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

En remplaçant par les valeurs numériques, on obtient :

$$\frac{4}{5} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{7}$$

D'après l'égalité des produits en croix, on a : $5 \times MN = 4 \times 7$

Donc $MN = \frac{28}{5}$

2) Exercice rédigé : Partage d'un segment :

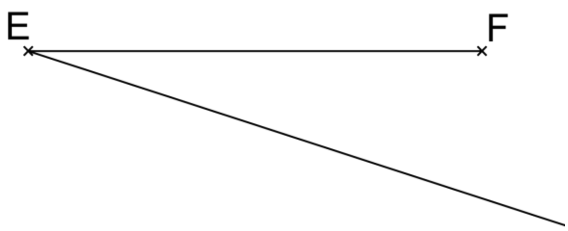
Tracer un segment [EF].

Construire le point M du segment [EF] tel que EM = $\frac{3}{7}$ EF.

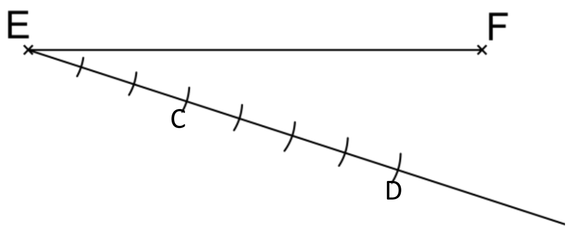
Solution étape par étape :

1. On commence par tracer un segment [EF] de longueur arbitraire :

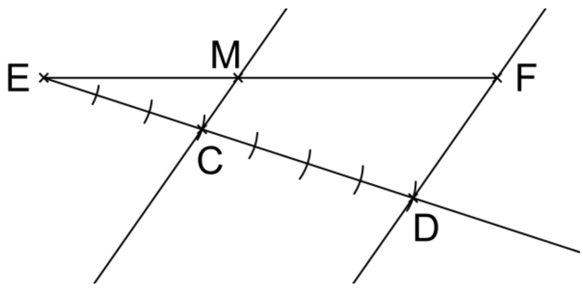
2. On trace une demi-droite d'origine E ne passant pas par F :



3. On gradue cette demi-droite à l'aide du compas puis on y place les points C et D d'abscisses respectives 3 et 7 :



4. On construit la parallèle à la droite (DF) passant par le point C.
On place le point M à l'intersection entre cette droite et la droite (EF).



Justification :

(MF) et (CD) se coupent en E
(MC) // (FD)
→ Théorème de Thalès → $\frac{EM}{EF} = \frac{EC}{ED} = \frac{3}{7}$

3) Exercice rédigé : Montrer que deux droites NE sont PAS parallèles :

On considère la figure ci-contre pour laquelle :

- AB = 9 cm ; AM = 3 cm ; AN = 2 cm et AC = 7 cm ;
- Les droites (BM) et (CN) sont sécantes au point A.

Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

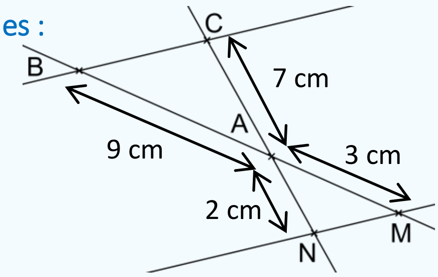
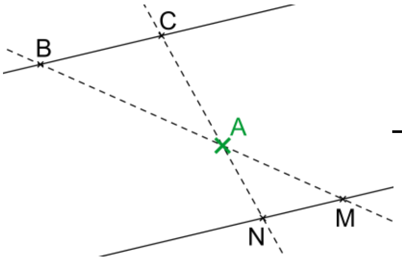


Schéma :

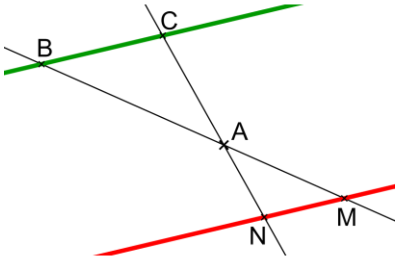
Données :



tel que : $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$

→ Théorème de Thalès non vérifié →

Conclusions :



Les droites (MN) et (BC) **NE** sont **PAS** parallèles.

Diagramme :

(MB) et (NC) se coupent en A

$\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$

→ Théorème de Thalès non vérifié → Les droites (MN) et (BC) **NE** sont **PAS** parallèles.

Rédaction :

Les droites (BM) et (CN) se coupent en A.

On a d'une part :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{9}$$

On a d'autre part :

$$\frac{AN}{AC} = \frac{2}{7}$$

Or : $\mathbf{3 \times 7 = 21}$
$\mathbf{9 \times 2 = 18 \neq 21}$ ⟶ On en déduit que : $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$

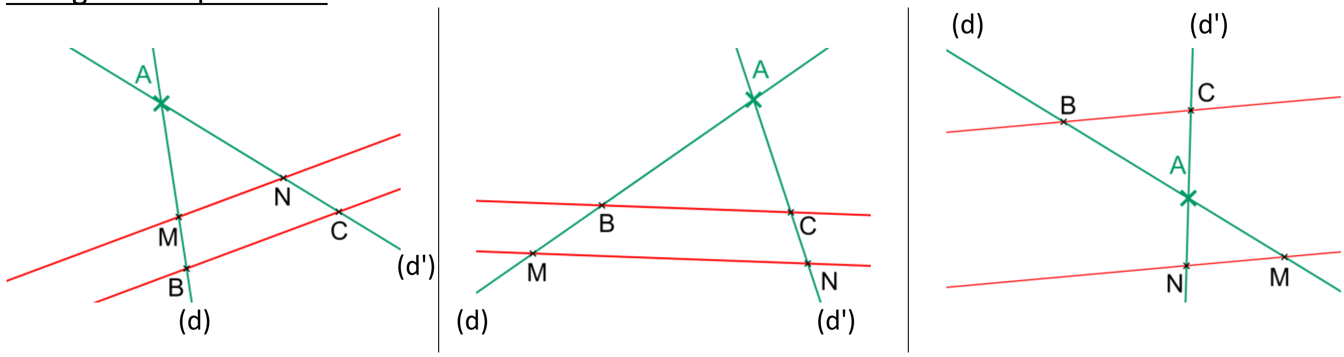
Le théorème de Thalès **N'**est **PAS** vérifié, **les droites (MN) et (BC) NE sont PAS parallèles.**

IV) Réciproque du théorème de Thalès :

1) Théorème : Réciproque du Théorème de Thalès : (Admis)

Si les points A, B, M d'une part et les points A, C, N d'autre part, sont alignés **dans le même ordre** et que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$,
alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Configurations possibles :



2) Exercice rédigé : Montrer que deux droites sont parallèles :

On considère la figure ci-contre pour laquelle :

- AN = 2 cm ; AM = 3 cm ; AB = 9 cm et AC = 6 cm ;
- Les droites (BM) et (CN) sont sécantes au point A.

Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

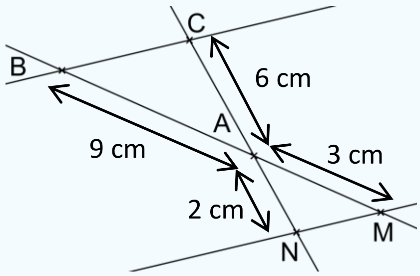
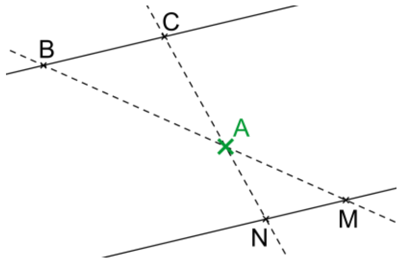


Schéma :

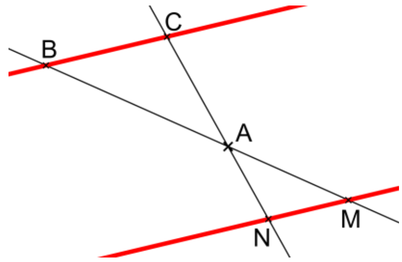
Données :



tel que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

→ Réciproque du Théorème de Thalès →

Conclusions :



Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Diagramme :

Données		Conclusion
(MB) et (NC) se coupent en A Les points M, A, B et N, A, C sont alignés dans le même ordre $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$	→ Réciproque du Théorème de Thalès →	Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

__Rédaction :__

Les point A, B, M d'une part et A, C, N d'autre part sont alignés dans le même ordre.

On a d'une part :
$$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{9}$$

On a d'autre part :
$$\frac{AN}{AC} = \frac{2}{6}$$

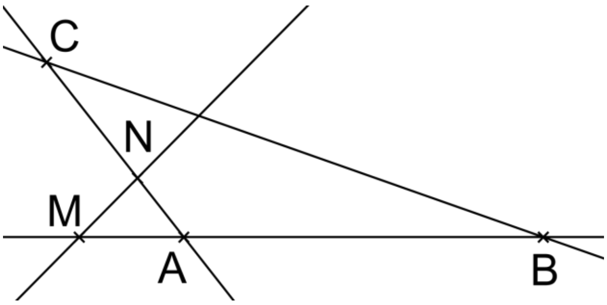
Or : **3 × 6 = 18**
9 × 2 = 18

$\longrightarrow$ On en déduit que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

D'après le théorème de Thalès, **les droites (MN) et (BC) sont parallèles.**

__Remarque :__

Pour la réciproque du théorème de Thalès, constater l'égalité des rapports ne suffit pas, il faut impérativement que les points soient alignés dans le MÊME ordre.



En considérant la figure ci-contre avec :
AB = 10, AM = 3, AN = 1,5 et AC = 5,

les points M, A, B et A, N, C sont alignés et $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{3}{10}$.

Pourtant les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.