Chapitre 10 :
TRIGONOMÉTRIE

I) Activités d'introduction :

II) Côté adjacent à un angle, côté opposé à un angle, hypoténuse :

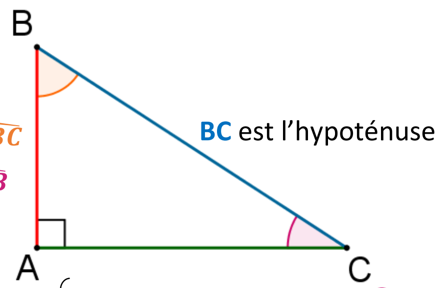
1) Définition : Coté adjacent à un angle, Côté opposé à un angle et Hypoténuse :

Dans un triangle **rectangle**, le côté opposé à l'angle droit est l'**hypoténuse**.

Les deux côtés de l'angle droit sont appelés **côtés opposé** ou **côté adjacent**, selon l'angle aigu considéré.

Exemple :

AB est $\begin{cases} \text{le } \textbf{côté adjacent} \text{ à l'angle } \widehat{ABC} \\ \text{le } \textbf{côté opposé} \text{ à l'angle } \widehat{ACB} \end{cases}$



AC est $\begin{cases} \text{le } \textbf{côté adjacent} \text{ à l'angle } \widehat{ACB} \\ \text{le } \textbf{côté opposé} \text{ à l'angle } \widehat{ABC} \end{cases}$

III) Cosinus, Sinus et Tangente d'un angle aigu :

2) Définition : Cosinus

Dans un triangle rectangle, le **cosinus** d'un angle aigu est égal au **quotient** de la longueur du côté **adjacent** à l'angle par la longueur de **l'hypoténuse**.

3) Définition : Sinus

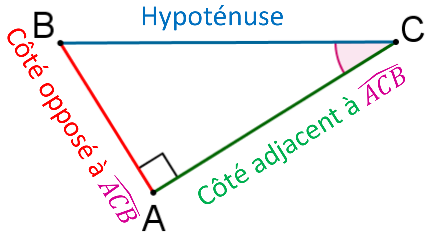
Dans un triangle rectangle, le **sinus** d'un angle aigu est égal au **quotient** de la longueur du côté **opposé** à l'angle par la longueur de **l'hypoténuse**.

4) Définition : Tangente

Dans un triangle rectangle, la **tangente** d'un angle aigu est égal au **quotient** de la longueur du côté **opposé** à l'angle par la longueur du côté **adjacent**.

Exemples :

Dans le triangle ABC rectangle en A ci-contre :



Cos ($\widehat{ACB}$) = $\dfrac{Côté\ adjacent\ à\ l'angle}{Hypoténuse}$

Cos ($\widehat{ACB}$) = $\dfrac{AC}{BC}$

Sin ($\widehat{ACB}$) = $\dfrac{Côté\ opposé\ à\ l'angle}{Hypoténuse}$

Sin ($\widehat{ACB}$) = $\dfrac{AB}{BC}$

Tan ($\widehat{ACB}$) = $\dfrac{Côté\ opposé\ à\ l'angle}{Côté\ adjacent\ à\ l'angle}$

Tan ($\widehat{ACB}$) = $\dfrac{AB}{AC}$

Exercice : Dans le triangle ABC ci-dessous, donner le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$.

5) Propriétés :

Le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont des **nombres strictement compris entre 0 et 1** :

Mathématiquement : si a désigne la mesure d'un angle aigu, alors : $0 < \cos(a) < 1$ et $0 < \sin(a) < 1$.

La tangente d'un angle aigu est un **nombre strictement positif.**

Mathématiquement : si a désigne la mesure d'un angle aigu, alors : $\tan(a) > 0$.

Exercice : Vérifier les propriétés ci-dessus pour les angles 30, 45 et 60.

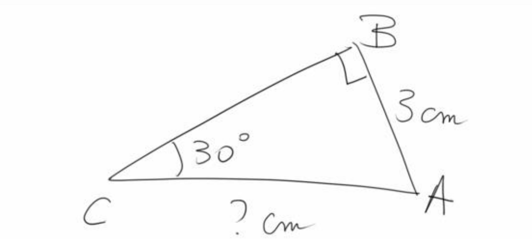
IV) Exemples rédigés :

1) Exemple de rédaction : Calcul d'une longueur

ABC un triangle rectangle en B tel que AB = 3 cm et $\widehat{BCA}$= 30°.
Calculer AC.

Avant de commencer :

1. Il est pertinent de réaliser un schéma (même à main levée) où l'on reporte l'ensemble des données de l'énoncé.



2. Il faut déterminer si l'on va utiliser la définition du cosinus, celle du sinus ou celle de la tangente.

   Pour ce faire, on sait que dans cet exercice :
   – on connaît l'angle $\widehat{BCA}$,
   – on connaît la longueur du côté **opposé** à $\widehat{BCA}$,
   – on cherche la longueur de l'**hypoténuse**.

La formule de trigonométrie faisant intervenir la longueur du côté **opposé** ET la longueur de l'**hypoténuse** est celle du sinus.

Rédaction :

Le triangle ABC est **rectangle** en B. ⟵ Cette condition est indispensable pour utiliser la définition du sinus.

d'après la définition du sinus, on a :

$$\sin \widehat{BCA} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{BCA}}{\text{hypoténuse}}$$

$\sin \widehat{BCA} = \frac{AB}{AC}$, en remplaçant par les valeurs numériques, on obtient :

$$\sin 30 = \frac{3}{AC}$$

$\frac{\sin 30}{1} = \frac{3}{AC}$, d'après l'égalité des produits en croix, on en déduit :

$$\sin 30 \times AC = 1 \times 3$$

et donc que :

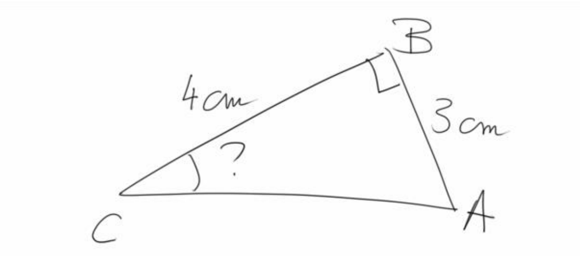
$AC = \frac{1 \times 3}{\sin 30}$= 6 cm.

2) Exemple de rédaction : Calcul d'un angle

ABC un triangle rectangle en B tel que AB = 3 cm et BC = 4 cm.
Calculer AC.

Avant de commencer :

1. Il est pertinent de réaliser un schéma (même à main levée) où l'on reporte l'ensemble des données de l'énoncé.



2. Il faut déterminer si l'on va utiliser la définition du cosinus, celle du sinus ou celle de la tangente.

   Pour ce faire, on sait que dans cet exercice :
   – on connaît la longueur du côté **opposé** à $\widehat{BCA}$,
   – on connaît la longueur du côté **adjacent** à $\widehat{BCA}$,
   – on cherche la mesure de **l'angle** $\widehat{BCA}$**.**

La formule de trigonométrie faisant intervenir la longueur du côté **opposé** ET la longueur du côté **adjacent** est celle de la tangente.

Rédaction :

Le triangle ABC est rectangle en B. ← Cette condition est indispensable pour utiliser la définition de la tangente.

d'après la **définition** de la tangente, on a :

$$\tan \widehat{BCA} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{BCA}}{\text{côté adjacent à } \widehat{BCA}}$$

$\tan \widehat{BCA} = \frac{AB}{BC}$, en remplaçant par les valeurs numériques, on obtient :

$$\tan \widehat{BCA} = \frac{3}{4}$$

on en déduit que :

$$\widehat{BCA} = \arctan(\frac{3}{4}) \approx 36{,}87°$$

L’angle $\widehat{BCA}$ mesure environ 36,87° (valeur arrondie au centième près).

IV) Relations trigonométriques :

1) Propriété :

Dans un triangle rectangle, pour tout angle aigu de mesure a :

- $(\cos a)^2 + (\sin a)^2 = 1$
- $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$

Exemple :

1. $(\cos 60)^2 + (\sin 60)^2 = 0{,}5^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$

$$= 0{,}25 + \frac{3}{4}$$
$$= 0{,}25 + 0{,}75$$
$$= 1$$

2. Soit x la mesure en degré d'un angle aigu tel que : $\cos x = 0{,}8$.

Pour calculer le sinus de cet angle, on utilise la relation :

$(\cos a)^2 + (\sin a)^2 = 1$

En remplaçant par la valeur numérique de $\cos x$, on obtient :

$(0{,}8)^2 + (\sin a)^2 = 1$

On en déduit que :

$(\sin a)^2 = 1 - (0{,}8)^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36.$

Par conséquent, comme $\sin x > 0$; on a :

$\sin x = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6.$

2. $\frac{\sin(60)}{\cos(60)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}5}$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{0{,}5}{1}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{0{,}5}$$
$$= \sqrt{3}$$
$$= \tan(60)$$

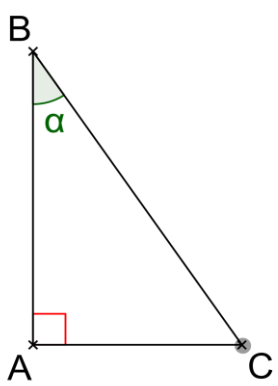
2) Démonstration :

ABC un triangle rectangle en A et $\hat{a} = \widehat{ABC}$.

1. $(\cos \hat{a})^2 + (\sin \hat{a})^2 = (\frac{AB}{BC})^2 + (\frac{AC}{BC})^2 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$

Or, comme le triangle est rectangle,
d'après le théorème de Pythagore, on a :
$AB^2 + AC^2 = BC^2$, et donc :

$(\cos \hat{a})^2 + (\sin \hat{a})^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$



2. $\frac{\sin\hat{a}}{\cos\hat{a}} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{\cancel{BC}} \times \frac{\cancel{BC}}{AB} = \frac{AC}{AB} = \tan\hat{a}$