Chapitre 11 :

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

I) Sphère et Boule :

1) Définition : Sphère :

Une sphère de **centre O** est un ensemble de points de l'espace situé à une même distance du point O.
La sphère de **centre O** et de **rayon R** est l'ensemble des points **M** de l'espace tels que **OM = R**.

Une sphère est une surface.

Exemple :

Ballons

Foot

Basket

Volley

Balles

Tennis

Tennis de table

Bulles de savon

Exemple : Citer d'autres exemples de sphères que l'on rencontre dans la vie courante.

2) Définition : Boule :

La boule de **centre O** et de **rayon R** est ensemble des points situés à une distance inférieure ou égale à **R** de **O**.

Autrement dit :

La boule de **centre** O et de **rayon R** est l'ensemble des points M de l'espace tels que **OM** $\leq$ **R**.

Une boule est un **solide**.

Exemples :

Boules de Pétanque

Boules de Billard

Billes

Exemple : Citer d'autres exemples de boules que l'on rencontre dans la vie courante.

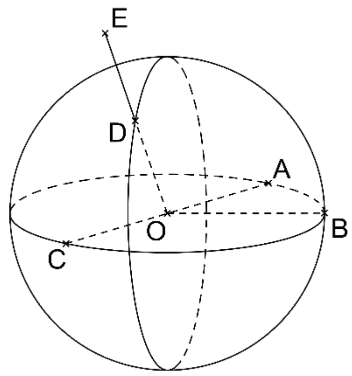
3) Définition : Grand cercle :

Un **grand cercle** d'une sphère est un cercle tracé à la surface de cette sphère qui a le même diamètre qu'elle.

Autrement dit :

Un **grand cercle** d'une sphère de centre O et de rayon R est un cercle de centre O et de rayon R.

Exemple :
Dans l'exemple ci-contre,
[OD] est un rayon du grand cercle vertical ;
[AC] est un diamètre du grand cercle horizontal.



Remarque :
Dans l'exemple ci-contre,
les points A, B, C, D et O appartiennent à la sphère de centre O et de rayon [OB] ;
le point E n'appartient n'appartient pas à la sphère de centre O et de rayon [OB].

4) Propriétés : Aire- Volume

Une sphère de rayon R a pour aire : $4\pi R^2$

Une boule de rayon R a pour volume : $\frac{4}{3}\pi R^3$

Exemples :

1. L'aire d'une sphère de rayon 5,3 cm est égale à : $4 \times \pi \times 5{,}3^2 = 112{,}36\pi \approx 353 cm^2$

2. Le volume d'une boule de rayon 2,7 cm est égale à : $\frac{4}{3} \times \pi \times 2{,}73^2 = \frac{78{,}732}{3}\pi \approx 82 cm^3$

Exercices :

1. Sachant que le rayon de la terre est d'environ 6400 km.
   Calculer sa surface ainsi que son volume.

2. Un ballon de basket adulte officiel pour les matches professionnels (taille 7) a un poids compris entre 567 et 624g et un diamètre compris entre 23,8 cm et 24,8 cm.
   Calculer le volume d'air nécessaire pour gonfler un tel ballon en supposant que l'enveloppe soit d'épaisseur négligeable.

II) Sections planes de solides :

1) Définition : Section plane :

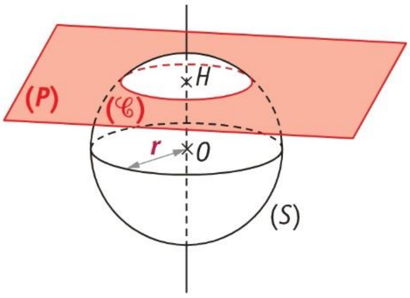
La **section plane d'un solide** est la surface obtenue lors d'une coupe de ce solide par un plan.
Les points de cette surface appartiennent à la fois au solide et au plan.

2) Propriété : Section plane d'une sphère par un plan

La section plane d'une sphère par un plan est un cercle lorsque la sphère et le plan sont **sécants**, ou un point lorsque la sphère et le plan sont tangents.

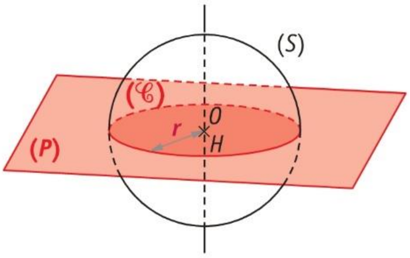
Exemple :

(S) est une sphère de centre *O* et de rayon *r*. *(P)* est un plan.
La droite passant par le point *O* et perpendiculaire au plan *(P)* coupe ce plan au point *H*.
La longueur *OH* est appelé **la distance** du point *O* au plan *(P)*.



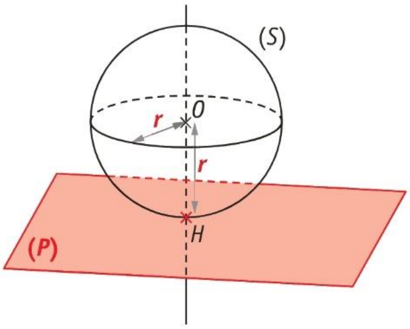
- Cas où $0 \leq OH \leq r$

Le plan *(P)* est la sphère *(S)* sont sécants.
La section de la sphère *(S)* par le plan *(P)* est le cercle (C)



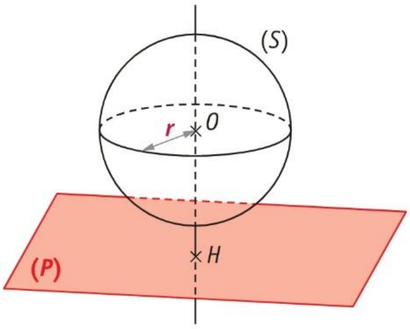
- Cas particulier : $OH = 0$

Le point *H* est confondu avec le point *O*.
La section de la sphère *(S)* par le plan *(P)* est un cercle (C) de centre *O* et de rayon *r*.
C'est un grand cercle de la sphère.
La sphère est partagée en deux **hémisphères.**



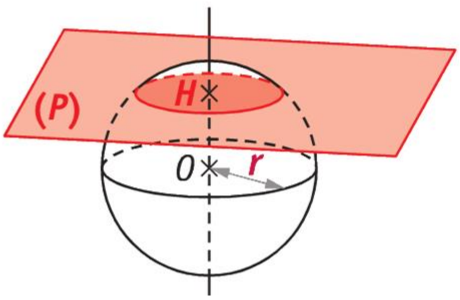
- Cas où $OH = r$

Le plan *(P)* est la sphère *(S)* sont tangents au point *H*.
La section de la sphère *(S)* par le plan *(P)* est le point *H*.



- Cas où $OH > r$

Le plan *(P)* ne coupe pas la sphère *(S)*.
Il n'y a donc pas de section de la sphère *(S)* par le plan *(P)*.



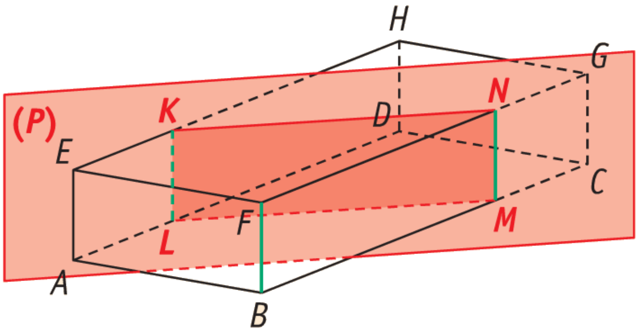
Remarque :
La section d'une boule par un plan est un disque ou un point.

PARALLÉLÉPIPÈDE RECTANGLE

3) Propriété :

La section plane d'un parallélépipède rectangle par **un plan parallèle à une de ses arêtes** est un rectangle.

Exemple :

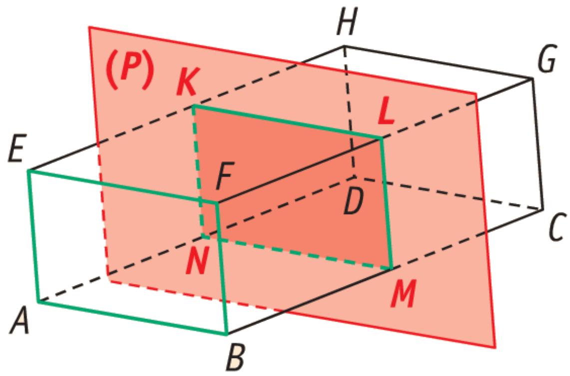


Le plan *(P)* est parallèle à l'arête [BF].
La section est le rectangle *KLMN*.
De plus, on a : *KL* = *BF*.

4) Propriété :

La section plane d'un parallélépipède rectangle par **un plan parallèle à une des faces** est un rectangle de mêmes dimensions que cette face.

Exemple :



Le plan *(P)* est parallèle à la face *ABFE*.
La section est le rectangle *KLMN*.
De plus, on a : *KL* = *EF* et *LM* = *FB*.

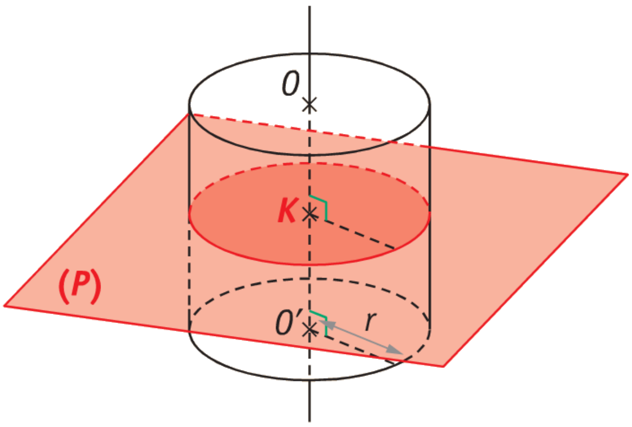
CYLINDRE DE RÉVOLUTION

5) Propriété :

La section d'un cylindre de révolution par **un plan perpendiculaire à son axe** est un disque de même rayon que ses deux bases.

Exemple :

Un cylindre de révolution d'axe (*OO'*) a pour rayon *r*.



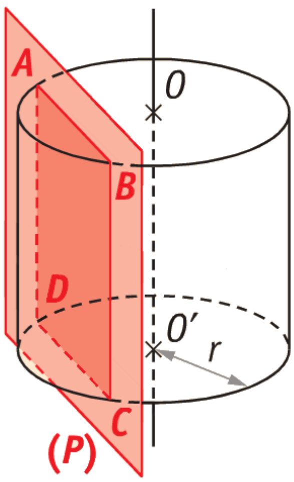
Le plan *(P)* est perpendiculaire à l'axe (*OO'*).
La section cylindre de révolution par le plan *(P)* est un disque de centre *K* et de rayon *r*.

6) Propriété :

La section plane d'un parallélépipède rectangle par **un plan parallèle à une des faces** est un rectangle de mêmes dimensions que cette face.

Exemple :

Un cylindre de révolution d'axe (*OO'*) a pour rayon *r*.

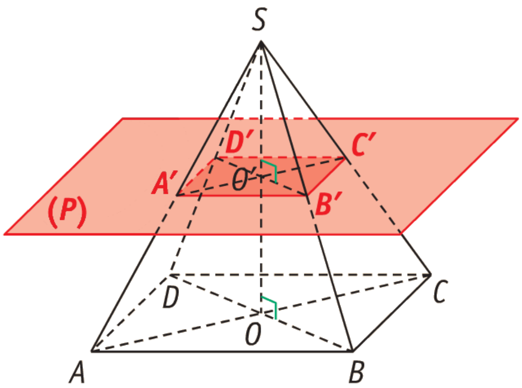


Le plan *(P)* est parallèle à l'axe (*OO'*).
La section du cylindre de révolution par le plan *(P)* est le rectangle *ABCD*.
De plus, on a : *AD* = *OO'*.

7) Propriété :
La section d'une pyramide par **un plan parallèle à sa base** est de même nature que sa base.

Exemple :

SABCD est une pyramide.
Le plan *(P)* est parallèle à la base rectangulaire *ABCD*.



La section de cette pyramide par le plan *(P)* est le rectangle *A'B'C'D'*, réduction du rectangle *ABCD*.

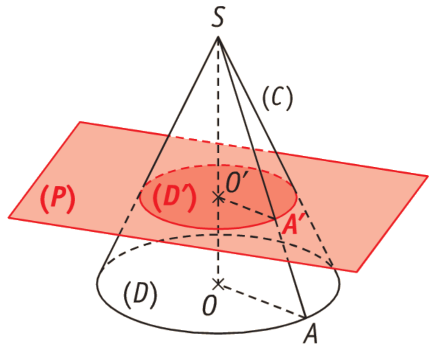
La pyramide *SA'B'C'D'* est une réduction de la pyramide *SABCD*.

Le rapport de réduction est par exemple :
$$\frac{A'B'}{AB} \text{ ou } \frac{SA'}{SA} \text{ ou } \frac{SO'}{SO}$$

8) Propriété :
La section d'un cône de révolution par **un plan parallèle à sa base** est un disque.

Exemple :

Un cône de révolution *(C)* a pour sommet *S* et pour base le disque *(D)*.
Le plan *(P)* est parallèle à la base *(D)*.



La section de ce cône par le plan *(P)* est le disque *(D')* de centre *O'*, réduction du disque *(D)*.

Le cône de sommet *S* et de base le disque *(D')* est une réduction du cône de révolution *(C)*.

Le rapport de réduction est par exemple :
$$\frac{O'A'}{OA} \text{ ou } \frac{SA'}{SA} \text{ ou } \frac{SO'}{SO}$$

III) Agrandissement- Réduction :

Propriété :
(S) et *(S')* sont deux solides. ***k*** désigne un nombre strictement positif.
Si le solide *(S')* est un agrandissement ou une réduction de rapport ***k*** du solide *(S)*, alors :
- une longueur de *(S')* s'obtient en **multipliant par k** la longueur associée de *(S)* ;
- l'**aire** d'une surface de *(S')* s'obtient en **multipliant par k²** l'aire de la surface associée de *(S)* ;
- le **volume** du solide *(S')* s'obtient en **multipliant par k³** le volume du solide *(S)*.

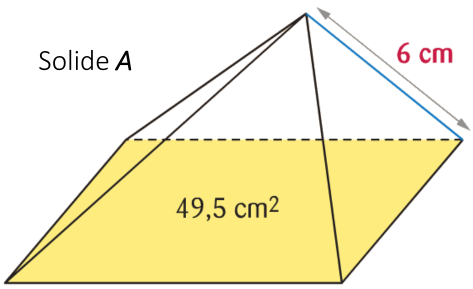
Exemple :

- Ci-contre, le solide ***B*** est une réduction de rapport $\frac{1}{3}$ du solide ***A***.

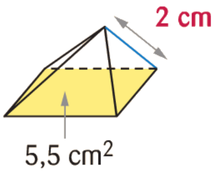
- Sur le solide ***A***, la longueur de l'arête bleue est 6 cm.
  Lors de la réduction, cette longueur est multipliée par $\frac{1}{3}$:
  $6 \text{ cm} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} \text{ cm} = 2 \text{ cm}$
  Donc, sur le solide ***B***, la longueur de l'arête bleue est 2 cm.

- Sur le solide ***A***, l'aire de la face jaune est 49,5 cm².
  Lors de la réduction, cette aire est multipliée par $\left(\frac{1}{3}\right)^2$:
  $49{,}5 \text{ cm}^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 49{,}5 \times \frac{1}{9} \text{cm}^2 = 5{,}5 \text{ cm}^2$
  Donc, sur le solide ***B***, l'aire de la face jaune est 5,5 cm².

Solide ***A***



Solide ***B***



- On effectue un agrandissement de rapport **4** du solide ***C*** ci-contre.
  Lors de l'agrandissement, le volume est multiplié par $\mathbf{4^3}$:
  $12{,}25\ \text{cm}^3 \times 4^3 = 784\ \text{cm}^3$
  Le volume du solide agrandi est $784\ \text{cm}^3$.

Solide ***C***