

Chapitre 02 : OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS

I) Inverse d'un nombre non nul :

1) Définition : Inverses :

Si le produit de deux nombre relatifs non nuls vaut 1, alors ces deux nombres sont inverses l'un de l'autre.

Exemple :

-5 est l'inverse de $\frac{1}{-5}$ sont deux inverses, en effet $-5 \times \frac{1}{-5} = 1$; $\frac{1}{-5}$ est l'inverse de -5 sont deux inverses, en effet $\frac{1}{-5} \times -5 = 1$.

Exercice : Relier chaque nombre à son inverse :

2	5	-8	3	-0,1
°	°	°	°	°
°	°	°	°	°
-0,125	0,2	0,5	$\frac{1}{3}$	-10

2) Démonstration :

Soient a et b deux nombres relatifs différents de 0 ;

l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

Exercice : Compléter le tableau suivant :

Nombre a	4	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	-9	2,5				x
Inverse du nombre a						$\frac{9}{2}$	5	$\frac{1}{3}$	

3) Définition : Droites parallèles :

Soient a et b deux nombres relatifs différents de 0 ; l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

Cas particulier : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} &= \frac{2 \times 3}{3 \times 2} \\ &= \frac{3 \times 2}{3 \times 2} \quad \text{car la multiplication est commutative.} \\ &= \frac{3}{3} \times \frac{2}{2} \\ &= 1 \times 1 \end{aligned}$$

Finalement : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$.

Cas particulier : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} &= \frac{2 \times 3}{3 \times 2} \\ &= \frac{3 \times 2}{3 \times 2} \quad \text{car la multiplication est commutative.} \\ &= \frac{3}{3} \times \frac{2}{2} \\ &= 1 \times 1 \end{aligned}$$

Finalement : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$.

II) Égalité de quotients :

1) Propriété :

Le quotient $\frac{a}{b}$ ne change pas lorsqu'on **multiplie** ou qu'on **divise** son numérateur **ET** son dénominateur par un **même** nombre différent de 0.

Mathématiquement : $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$ avec a, b et k trois nombres relatifs tels que $b \neq 0$ et $k \neq 0$.

Exemples :

$$1. \quad \frac{3}{5} = \frac{-3 \times 4}{5 \times 4} = \frac{-12}{20}$$

$$2. \quad \frac{9}{-15} = \frac{9 \div 3}{-15 \div 3} = \frac{3}{-5}$$

Exercice :

Relier chaque nombre à son inverse :

$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{9}{9}$	$\frac{15}{6}$
o	o	o	o	o
o	o	o	o	o
$\frac{49}{56}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{7}{7}$

2) Propriété :

$\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux écritures fractionnaires tels que $b \neq 0, d \neq 0$.

Dire que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ revient à dire que $a \times d = c \times b$.

Exemples :

$$1. \quad \frac{3}{5} = \frac{12}{20}, \text{ en effet } 3 \times 20 = 15 \times 5$$

$$2. \quad \frac{9}{-15} \neq \frac{3}{-5}, \text{ en effet } 9 \times -5 = -15 \times 3$$

Exercice :

$$1. \quad \text{Prouver, à l'aide du produit en croix, que } \frac{17}{15} = \frac{221}{195}.$$

$$2. \quad \text{Trouver, à l'aide du produit en croix, la valeur du nombre } m, \text{ telle que :}$$
$$\frac{5}{12} = \frac{m}{15}.$$

3) Démonstration :

Si b et d sont deux nombres relatifs différents de 0,

alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ revient à dire que $a \times d = c \times b$.

Sens direct : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = cb$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\text{donc : } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = 0.$$

$$\text{donc : } \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{db} = 0.$$

$$\text{donc : } \frac{ad - cb}{bd} = 0.$$

$$\text{donc : } ad - cb = 0.$$

Finalement : $ad = cb$.

Réciproque : $ad = cb \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$ad = cb$$

$$\text{donc : } ad - cb = 0.$$

$$\text{donc : } \frac{ad - cb}{bd} = 0. \text{ (Possible car } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0).$$

$$\text{donc : } \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{db} = 0.$$

$$\text{donc : } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = 0.$$

Finalement : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

III) Transformer une division en multiplication :

1) Propriété :

Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

Exemples :

$$1. \quad \frac{3}{5} = 3 \times \frac{1}{5}$$

$$2. \quad \frac{1}{2} \div \frac{5}{7} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{5} = \frac{7}{10}$$

Exercice :

Calculer :

$$1. \quad \frac{4}{5} \div \frac{5}{8}$$

$$2. \quad \frac{-3}{5} \div 2$$

$$3. \quad 7 \div \frac{14}{-9}$$

2) Démonstration :

Cas particulier : $\frac{3}{5} = 3 \times \frac{1}{5}$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 1}{1 \times 5}$$

$$= \frac{3}{1} \times \frac{1}{5}$$

Finalement : $3 \times \frac{1}{5}$.

Cas général : x, y deux nombres relatifs.

$$\frac{x}{y} = \frac{x \times 1}{1 \times y}$$

$$= \frac{x}{1} \times \frac{1}{y}$$

Finalement : $x \times \frac{1}{y}$.

IV) Opérations sur les nombres relatifs en écriture fractionnaire :

