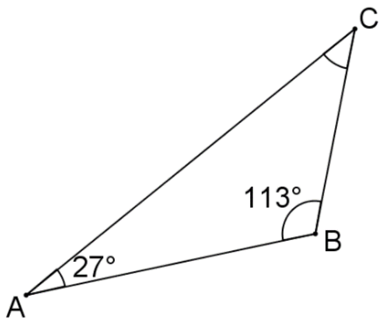
Chapitre 04 :

CALCUL LITTÉRAL : IDENTITÉ REMARQUABLE ET ÉQUATIONS PRODUIT NUL

I) Suppression de parenthèses :

1) Activité :

Calculer la mesure de l'angle $\hat{C}$ en proposant deux suites d'opérations différentes mais donnant le même résultat.



1) Propriété : Parenthèses précédées d'un signe $+$:

Quand une paire de parenthèses est précédée par un signe « $+$ » (et n'est pas suivie par un $\times$, un $\div$ ou une puissance), il est possible de la supprimer en ajoutant tous les termes situés entre ces parenthèses.

Exemple :
Développer l'expression $A = 3 + (5 - 4)$

$$\begin{aligned} A &= 3 + (5 - 4) \\ &= 3 + 5 + (-4) \\ &= 3 + 5 - 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Exercice :
Développer l'expression $A' = 5 + (-4 + 7)$

$A' =$
$=$
$=$
$=$

2) Propriété : Parenthèses précédées d'un signe $-$:

Quand une paire de parenthèses est précédée par un signe « $-$ » (et n'est pas suivie par un $\times$, un $\div$ ou une puissance), il est possible de la supprimer en retranchant tous les termes situés entre ces parenthèses.

Exemple :
Développer l'expression $B = 3 - (5 - 4)$

$$\begin{aligned} B &= 3 - (5 - 4) \\ &= 3 - 5 - (-4) \\ &= 3 + 5 + 4 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Exercice :
Développer l'expression $B' = 5 - (-4 + 7)$

$B' =$
$=$
$=$
$=$

II) Distributivité simple : Le produit $\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$

1) Activité :

Calculer sans poser :

			Règle utilisée :
$17 \times 1001 =$	$14 \times 10\,001 =$	$2\,001 \times 7 =$	
$5 \times 99 =$	$6 \times 999 =$	$25 \times 996 =$	
$35 \times 7 + 35 \times 3 =$	$9 \times 16{,}5 - 9 \times 3{,}5 =$	$18 \times 4{,}4 + 18 \times 95{,}6 =$	

Remarque : Pour effectuer les calculs ci-dessus de tête, il est possible de recourir au calcul astucieux faisant intervenir des développements/factorisations.

2) Propriété : Distributivité simple : $\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$

Quels que soient les nombres relatifs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{k}$, on a l'égalité :

$$\underbrace{\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})}_{\textit{Produit}} = \underbrace{\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{b}}_{\textit{Somme algébrique}}$$

Remarque :
Quand on transforme un produit en somme algébrique, on dit que l'on développe le produit.

$$\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{b}$$

Exemple :
Développer l'expression $C = -2(y + 7)$

$$C = -2 \times (y + 7)$$
$$= (-2) \times y + (-2) \times 7$$
$$= -2y - 14$$

Exercice :
Développer l'expression $C' = 5(2x - 8)$

Remarque :
Quand on transforme une somme algébrique en produit, on dit que l'on factorise la somme algébrique.

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$$

Exemple :
Factoriser l'expression $D = -2y - 14$

$$D = -2y - 14$$
$$= \underbrace{(-2)}_{\boldsymbol{k}} \times \underbrace{y}_{\boldsymbol{a}} + \underbrace{(-2)}_{\boldsymbol{k}} \times \underbrace{7}_{\boldsymbol{b}}$$
$$= -2 \times (y + 7)$$

Exercice :
Factoriser l'expression $D' = 15x - 10$

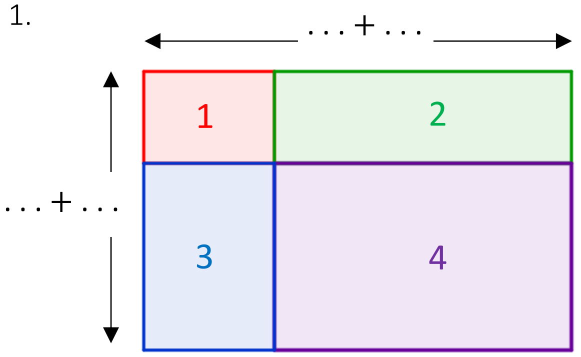
III) Double Distributivité : $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d})$

1) Activité :

Rappel : *Aire d'un rectangle = Longueur × largeur =* $L \times l$

L'aire du rectangle ABCD peut être calculé de deux manières :

1.



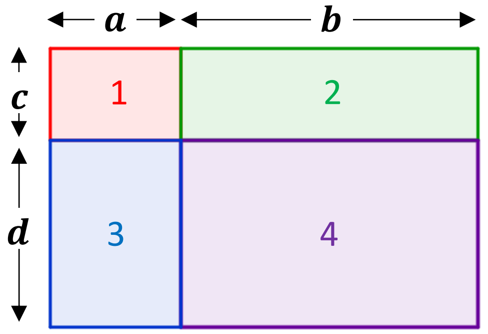
Aire du rectangle

= Longueur × largeur

= $L \times l$

= $(\ldots + \ldots) \times (\ldots + \ldots)$

2.



Aire du rectangle

= Longueur × largeur

= $L_1 \times l_1 \; + \; L_2 \times l_2 \; + \; L_3 \times l_3 \; + \; L_4 \times l_4$

= … $\times$ … $+$ … $\times$ … $+$ … $\times$ … $+$ … $\times$ …

Remarque :

On en déduit que pour tous nombres $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{d}$ positifs, on a :

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d}$$

On admet que cette propriété reste vraie pour tous nombres relatifs $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{d}$.

2) Propriété : Double distributivité : $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d})$

Quels que soient les nombres relatifs $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{d}$, on a l'égalité :

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d}$$

Exemple :

Développer l'expression $E = (3x + 2)(5y - 7)$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} = (3x + 2) \times (5y + (-7)) &= 3x \times 5y + 3x \times (-7) + 2 \times 5y + 2 \times (-7) \\ &= 15xy - 21\,x + 10y - 14 \end{aligned}$$

Exercice :

Développer l'expression $E' = (5x - 3)(4x + 9)$

IV) Factoriser à l'aide d'un facteur commun : $\boldsymbol{k \times a + k \times b}$; $\boldsymbol{k \times a - k \times b}$

1) Propriété : Facteur commun : $\boldsymbol{k \times a + k \times b}$; $\boldsymbol{k \times a - k \times b}$

Quels que soient les nombres relatifs a, b, on a l'égalité :

$$\boldsymbol{k \times a + k \times b = k \times (a + b)}$$
$$\boldsymbol{k \times a - k \times b = k \times (a - b)}$$

Exemples :

1. Factoriser l'expression $I = 3y + 21$

Etape 1	$\boldsymbol{I = 3y + 21}$	On fait apparaître un facteur commun.
Etape 2	$\boldsymbol{I = 3 \times y + 3 \times 7}$	On factorise.
Etape 3	$\boldsymbol{I = 3 \times (y + 7)}$	

2. Factoriser l'expression $J = (9x - 4)(5x + 6) - (9x - 4)^2$

Etape 1	$\boldsymbol{J = (9x - 4)(5x + 6) - (9x - 4)^2}$	On fait apparaître un facteur commun.
Etape 2	$\boldsymbol{J = (9x - 4)(5x + 6) - (9x - 4)(9x - 4)}$	On factorise.
Etape 3	$\boldsymbol{J = (9x - 4)[(5x + 6) - (9x - 4)]}$	On supprime les parenthèses à l'intérieur des crochets en faisant attention au signe « $-$ »
Etape 4	$\boldsymbol{J = (9x - 4)[5x + 6 - 9x + 4]}$	On réduit l'expression à l'intérieur des parenthèses
Etape 5	$\boldsymbol{J = (9x - 4)(-5x + 10)}$	

Exercices :

1. Factoriser l'expression : $I = 16x + 12$
2. Factoriser l'expression : $J = (7x - 3)(3x + 2) - (3x + 2)^2$