

Chapitre 07B : PROBABILITÉS

I) Expérience aléatoire :

1) Définitions : Expérience aléatoire – Issue :

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les résultats, non tous identiques, sont prévisibles mais dont on ne connaît pas à l'avance lequel va se produire.

Les résultats possibles de l'expérience sont appelés **issues**.

Exemple :

On effectue l'expérience suivante :

« On lance un dé à 6 faces et on note le nombre de points inscrits sur sa face supérieure. »

Cette **expérience** admet **6 issues** : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Le résultat de l'expérience est uniquement dû au hasard, il s'agit d'une **expérience aléatoire**.



Exercice :

Proposer une autre expérience aléatoire dont on précisera les issues possibles.

2) Propriété :

Lorsqu'on répète une expérience aléatoire, le résultat ne dépend pas des résultats des expériences réalisées précédemment.

Exemple :

Bien qu'ayant lancé 4 fois de suite un dé à 6 faces et ayant obtenu un nombre pair à chaque lancer, il n'est pas possible de déterminer si l'on obtiendra un nombre pair au prochain lancer : le 5^{ème} lancer peut aboutir à un nombre pair ou impair.

3) Définitions : Événement – Événement élémentaire :

Un **événement** est une condition qui, selon l'issue de l'expérience aléatoire, est réalisée ou non. Il peut être constitué d'aucune, d'une ou de plusieurs issues de l'expérience.

Un **événement élémentaire** est un événement constitué d'une seule issue.

Exemple :

On considère :

l'événement A : « On a obtenu un quatre »

l'événement B : « On a obtenu un nombre impair »

l'événement C : « On a obtenu un sept »

L'événement A est constitué de la seule issue : « 4 » :

L'événement A est un événement élémentaire.



L'événement B est constitué de trois issues : « 1 », « 3 » et « 5 » :

L'événement B **N'est PAS** un événement élémentaire.



L'événement C **N'est** constitué d'**AUCUNE** issue.

Exercice :

Proposer 3 autres événements dont un élémentaire, un non élémentaire et un constitué d'aucune issue..

II) Probabilité d'un événement :

1) Propriété - Définition : Probabilité :

Lorsque l'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence à laquelle se réalise un événement se rapproche d'une « fréquence théorique » appelée **probabilité**.

La probabilité d'un événement A se note $p(A)$.

Exemple :

En lançant une pièce non truquée un très grand nombre de fois, on constate que l'on obtient « pile » quasiment une fois sur deux.

Autrement dit, la fréquence d'apparition de « pile est sorti » se rapproche de $\frac{1}{2}$.

On dit que la probabilité de l'événement « pile est sorti » est $\frac{1}{2} = 0,5$.

On note : $p(\text{pile est sorti}) = 0,5$.



Exercice :

Donner la probabilité d'obtenir un nombre strictement supérieur à 4 lorsqu'on lance un dé de 6 faces parfaitement équilibré.

2) Propriété :

Une probabilité est un nombre **compris entre 0 et 1**.

Un événement dont la probabilité est nulle (égale à 0) est un **événement impossible**.

Un événement dont la probabilité est égale à 1 est un **événement certain**.

La **somme** des probabilités d'obtenir chaque issue est **égale à 1**.

Exemples :

Dans un jeu de carte classique de 32 cartes,

1. l'événement « tirer un as OU un trèfle » est réalisé lors d'une des 11 issues :

- as de cœur,
- as de pique,
- as de carreau,
- 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi de trèfle



Il y a donc onze fois 1 chance sur 32 de tirer un as ou un trèfle, soit une probabilité de $\frac{11}{32}$.

$$0 \leq p(\text{tirer un as OU un trèfle}) \leq 1$$

2. l'événement « tirer un 2 » est impossible dans un jeu classique de 32 cartes.

$$p(2) = 0$$

3. En lançant un dé de 6 faces,

La probabilité de l'événement « obtenir un résultat inférieur à 7 » est de 1, c'est un événement certain.

$$p(\text{obtenir un résultat inférieur à 7}) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1.$$

3) Définition : Equiprobabilité :

Pour expérience aléatoire, lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'il s'agit d'une situation d'**équiprobabilité** (même probabilité).

Exemple :

En lançant un dé de 6 faces, il y a autant de chance d'obtenir chacune des issues :

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = \frac{1}{6}.$$

Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

4) Propriété : Règle de Laplace :

Dans une situation **d'équiprobabilité**, la probabilité d'un événement A est égal au quotient :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à l'événement A}}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

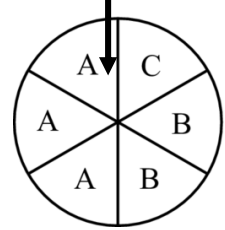
Exemple :

Sur la roue ci-contre, il y a 6 secteurs dont 3 avec l'inscription A. Chaque secteur angulaire est de la même taille. Il y a donc autant de chance de tomber sur chacun des événements élémentaires.

La situation est une situation **d'équiprobabilité**.

Pour calculer la probabilité « Obtenir un A », on peut utiliser la règle de Laplace :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à l'événement A}}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{3}{6}$$



Exercice : Calculer la probabilité « Obtenir un B ».

III) Événements incompatibles :

1) Définition : Événements incompatibles :

Deux événements qui ne peuvent pas se produire en même temps sont dits **incompatibles**.

Exemple :

En lançant une pièce, les événements :

A : « Obtenir pile » et B : « Obtenir face »

sont incompatibles :

il n'est pas possible d'obtenir à la fois pile et à la fois face.

Exercice :

On tire une carte d'un jeu de 54 cartes.

Proposer deux événements **non élémentaires incompatibles**.

2) Propriété :

Si deux événements A et B sont incompatibles, alors la probabilité que l'un **ou** l'autre se réalise est égale à la somme des probabilités de ces événements :

$$p(A \text{ ou } B \text{ est réalisé}) = p(A) + p(B)$$

Exemple :

En lançant un dé équilibré de 6 faces numérotées de 1 à 6, les événements :

A : « Obtenir un 1 » et B : « Obtenir un 6 »

sont incompatibles :

il n'est pas possible d'obtenir à la fois 1 et à la fois 6.

$$p(A \text{ ou } B \text{ est réalisé}) = p(A) + p(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Exercice :

On lance un dé équilibré de 6 faces numérotées de 1 à 6, et on considère les événements suivants :

C : « Obtenir un nombre pair » et D : « Obtenir un 5 »

Calculer, en justifiant, $p(C \text{ ou } D \text{ est réalisé})$.

3) Définition : Événement contraire :

L'**événement contraire** d'un événement A est celui qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.

On le note : non A ou \bar{A} .

Exemple :

On lance un dé équilibré de 6 faces numérotées de 1 à 6.

On considère l'événement A : « Obtenir un 1 »

L'événement \bar{A} est défini par :

« Obtenir n'importe quel nombre sauf un 1 ».

Il est composé de 5 issues : 2, 3, 4, 5 et 6.

On obtient : $p(\bar{A}) = \frac{5}{6}$.

Exercice :

On lance un dé équilibré de 6 faces numérotées de 1 à 6, et on considère les événements suivants :

C : « Obtenir un nombre pair » et D : « Obtenir un 5 »

Calculer, en justifiant, $p(C \text{ ou } D \text{ est réalisé})$.

4) Propriété :

La somme des probabilités de A et de son contraire est égale à 1 :

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

Autrement dit :

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

Exemple :

En considérant les événements A et \bar{A} de l'exemple précédent, on obtient :

$$p(A) + p(\bar{A}) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

ou encore :

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Exercice :

On lance un dé équilibré de 6 faces numérotées de 1 à 6, et on considère l'événement suivants :

C : « Obtenir un nombre strictement plus grand que 5 »

Calculer, en justifiant, $p(\bar{C})$.