Chapitre 06 :

PROPORTIONNALITÉ

I) Vocabulaire :

1) Définition : Situation de proportionnalité :

En mathématiques, on dit que deux grandeurs sont **proportionnelles** lorsque les valeurs de l'une s'obtiennent en **multipliant** (ou en **divisant**) les valeurs de l'autre par un **même nombre** non nul.

Ce nombre est appelé **coefficient de proportionnalité**.

Exemple :

Sur la devanture d'une boulangerie, on peut lire :

1 Baguette = 1,10 €

3 Baguettes achetées, 1 offerte

Cette situation NE relève PAS d'une situation de proportionnalité.

En effet :

1 Baguette $\xrightarrow{\times 1{,}10\ €}$ 1,10 €

2 Baguettes $\xrightarrow{\times 1{,}10\ €}$ 2,20 €

3 Baguettes $\xrightarrow{\times 1{,}10\ €}$ 3,30 €

4 Baguettes $\xrightarrow{\cancel{\times 1{,}10\ €}}$ 3,30 €

Exercice :

https://natachacreative.com/cuisine/barre-tendre/

Pour réaliser 10 « barres tendres », il faut :

INGRÉDIENTS

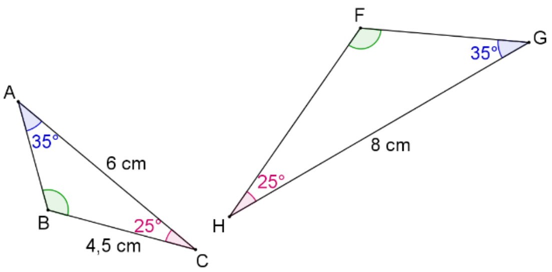
INGRÉDIENTS SECS	MÉLANGE HUMIDE
2 tasses d'avoine	3 c. à table de beurre
1 tasse de noix de coco non sucrée	¼ tasse de sirop d'érable
1 tasse de graines de citrouille	½ tasse de miel
½ tasse d'amandes en bâtonnets	3 c. à table de cassonade
½ tasse de graines de lin	1 c. à thé de vanille
½ tasse de pacanes	¼ c. à thé de sel
½ tasse de pépites de chocolat noir	

Adapter la recette pour 20 « barres tendres ».

2) Définition : Tableau de proportionnalité :

Une situation de proportionnalité peut être présentée dans un tableau (appelé **tableau de proportionnalité**) dans lequel on précise les grandeurs proportionnelles et les unités utilisées.

Exemple :



Les triangles ci-contre sont semblables donc les côtés opposés aux angles égaux ont leurs longueurs proportionnelles.

6 cm	4,5 cm
8 cm	HF

$\times \frac{4}{3}$ $\times \frac{4}{3}$

3) Définition : Quatrième proportionnelle :

Lorsque dans deux colonnes d'un tableau de proportionnalité on connaît trois nombres, on peut calculer le quatrième.
On l'appelle la quatrième proportionnelle.

Connu	Connu
Connu	?

Exemple :
Si l'on considère le tableau de l'exemple précédent,
HF est la quatrième proportionnelle.

6 cm	4,5 cm
8 cm	HF

4) Propriété : Produit en croix :

Dans un tableau de proportionnalité, **les produits en croix** sont égaux.

Concrètement :
On considère a, b, c et d quatre nombres tels que c et d soient non nuls.

Si

a	b
c	d

est un tableau de proportionnalité, alors : $\boxed{a \times d = c \times d}$

Exemple :
Dans le tableau de proportionnalité ci-contre :
- $8{,}2 \times 39{,}5 = 323{,}9$
- $41 \times 7{,}9 = 323{,}9$

Les deux produits en croix sont bien égaux.

$8,2$	$7,9$
41	39,5

× 5

Remarques :
1. La réciproque reste vraie : Si $\boxed{a \times d = c \times d}$, alors

a	b
c	d

est un tableau de proportionnalité.

2. Démonstration disponible à l'adresse suivante :
http://pedagogie.ac-toulouse.fr/math/stages/college/quatrieme_06_07/calcul/word/demonstration_produits_en_croix.doc

II) Déterminer un quatrième proportionnelle :

1) Méthode : Compléter un tableau de proportionnalité.

Pour déterminer **une quatrième proportionnelle**, on choisit le plus simple selon l'énoncé.

Exemple :
Sur une carte, 2 cm représentent 12 km.
Calculer la distance réelle représentée par 3 cm.

Pour déterminer la distance réelle représentée par 3 cm sur la carte, il est possible d'utiliser plusieurs méthodes :

1. En utilisant le coefficient de linéarité :
Pour 2 cm, on a 12 km.
Comme $3 = 2 \times \frac{3}{2}$, la distance réelle correspondante à 3 cm sur la carte est de $12 \times \frac{3}{2} = 18$ km.

$\times \frac{3}{2}$

Distance sur la carte en cm	2	3
Distance réelle en km	12	...

$\times \frac{3}{2}$

2. En utilisant le coefficient de proportionnalité :
Pour 2 cm, on a 12 km.
Pour obtenir 12 à partir de 2, il faut multiplier 2 par 6.
Pour calculer la distance réelle correspondante à 3 cm, il suffit de multiplier 3 par 6.
6 est appelé le coefficient de proportionnalité qui lie la distance sur la carte à la distance réelle.

Distance sur la carte en cm	2	3
Distance réelle en km	12	...

$\times 6$

3. En utilisant « la règle de trois » (passage par l'unité) :
Pour 2 cm, on a 12 km.
Pour 1 cm, on a 2 fois moins, soit 6 km.
On en déduit que pour 3 cm, on a 6 × 3 = 18 km.

$\div 2$ $\times 3$

Distance sur la carte en cm	2	1	3
Distance réelle en km	12	12÷2	6×3

$\div 2$ $\times 3$

4. En ajoutant les nombres de deux colonnes pour obtenir la valeur de la troisième :

+

Distance sur la carte en cm	2	1	3
Distance réelle en km	120	60	120+60

+

5. En utilisant l'égalité des produits en croix :
Comme le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité,

Distance sur la carte en cm	2	3
Distance réelle en km	120	x

les produits en croix sont égaux.
On en déduit que :
$2 \times x = 3 \times 120$
$2x = 360$
$x = \dfrac{360}{2} = 180.$

III) Représentations graphiques et proportionnalité :

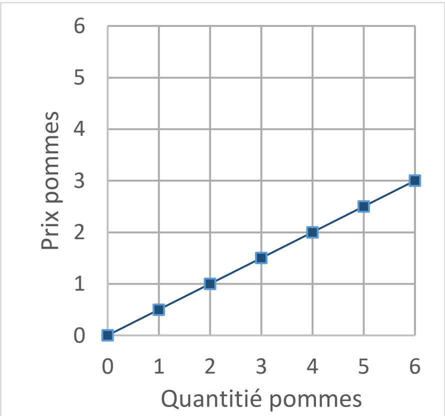
1) Propriétés :

Une **situation de proportionnalité** est représentée graphiquement dans un repère par des points alignés avec l'origine du repère.

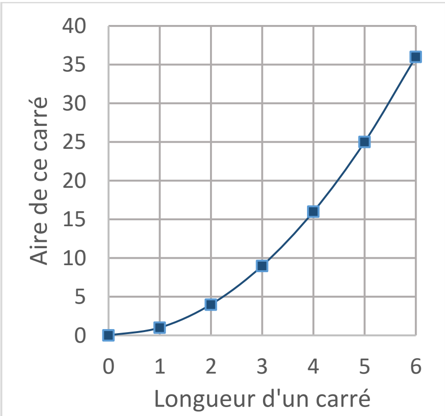
Réciproquement :

Si une situation est représentée graphiquement par des points alignés avec l'origine du repère, alors c'est une situation de proportionnalité.

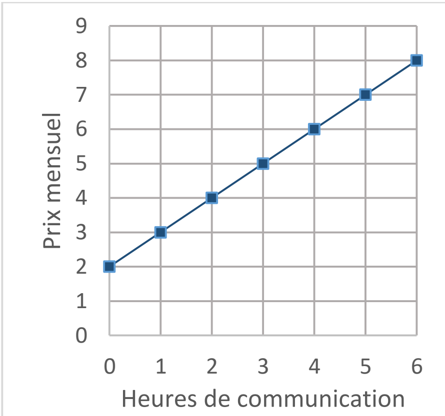
Exemples :



Ce graphique représente une situation de proportionnalité car les points sont alignés avec l'origine du repère.



Ce graphique NE représente PAS une situation de proportionnalité car les points ne sont pas alignés.



Ce graphique NE représente PAS une situation de proportionnalité car les points ne sont pas alignés avec l'origine du repère.

IV) Grandeurs quotient :

1) Définition : Vitesse moyenne :

La **vitesse moyenne** d'un objet mobile sur une distance donnée est la vitesse que devrait avoir cet objet s'il parcourait cette même distance **à vitesse constante** sur la même durée.

Exemples :

Un train part à 7h57 et
arrive à 8h21,
il a parcouru 60 km.

De 7h57 à 8h21, il y a 24 minutes.

On en déduit que :

60 km → 20 minutes
... km → 60 minutes (1h)

On trouve :

... = 180.

A vitesse constante, le train parcourrait 180 km en 1h.

On dit que la vitesse moyenne du train est de 180 km/h.

2) Définition : Débit moyen :

Le **débit moyen** d'un robinet, pompe, … sur un temps donné est le débit que devrait avoir cet objet s'il laissait s'écouler la même quantité d'eau finale sur la même durée sans subir de variation de débit.

Exemples :

Piscine olympique dijon

Une piscine Olympique mesure 50 m de long sur 20 m de large et a une profondeur de 2 m.
Donner un ordre de grandeur du temps nécessaire pour la remplir à l'aide d'une pompe dont le débit est de : 7500 L / h

Volume de la piscine : $50\text{m} \times 20\text{m} \times 2\text{m} = 2\ 000\text{m}^3$
$= 2\ 000\ 000$ L

On en déduit que :

7 500 L ⟶ 1 heure = 60 minutes
2 000 000 L ⟶ 16 000 minutes ≈ 266h

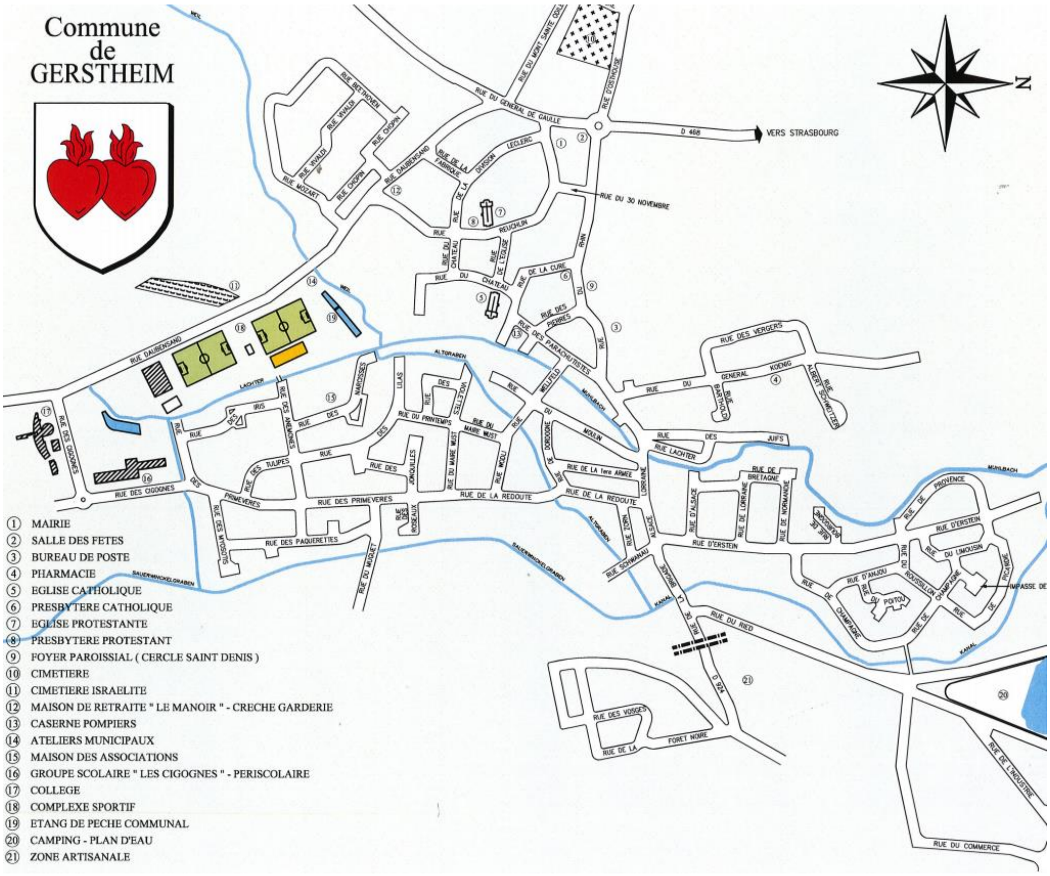
On en déduit qu'il faut un peu plus de 11 jours pour remplir la piscine.

3) Définition : Echelles :

L'**échelle** d'une carte est le rapport mathématique entre une longueur sur la **carte** et la longueur réelle sur le terrain dans la même unité.

Exercice :

Déterminer l'échelle de la carte de Gerstheim, en effectuant au préalable les mesures nécessaires avec un vélo :



Remarque : Il existe de nombreuses grandeurs quotient mais aussi des grandeurs produit : aire, volume, …

V) Pourcentages :

1) Propriété :

Un pourcentage de t % traduit une situation de proportionnalité de coefficient $\frac{t}{100}$.

Donc appliquer un taux de t % revient à multiplier par $\frac{t}{100}$.

Exemple :
Juin 2016, il y avait 81 élèves au collège de Gerstheim.
Environ 88,7 % de ces élèves ont eu leur brevet.
28,4% ont eu leur brevet avec une mention TB.
13,5% ont eu leur brevet avec une mention B.
15 ont eu leur brevet avec une mention AB.
Calculer le nombre d'élève ayant eu leur brevet.

Pour calculer le nombre d'élèves ayant eu leur brevet,
on peut utiliser la propriété précédente :
$81 \times \frac{88,7}{100} \approx 72$.

On en déduit que 72 élèves ont eu leur brevet.

Exercice :
Calculer le nombre d'élèves ayant eu une mention TB puis B.

2) Définition :

Déterminer un pourcentage, c'est déterminer une proportion écrite sous forme d'une écriture fractionnaire de dénominateur 100.

Exemple :
Dans l'exemple précédent, on a :
81 élèves $\longrightarrow$ 100%
15 élèves $\longrightarrow$ .... %
Pour trouver le pourcentage correspondant aux 15 élèves, on peut utiliser l'égalité des produits en croix.

On obtient :
$81 \times \ldots = 15 \times 100$

Et donc :
$\ldots = \frac{15 \times 100}{81} \approx \frac{18,5}{100} = 18,5\ \%$.