Chapitre 10 :
PÉRIMÈTRE ET AIRE

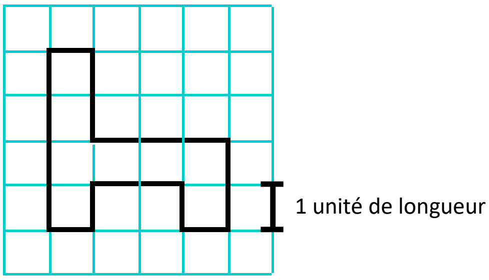
I) Périmètre d'un polygone :

1) Définition : Périmètre :

Le **périmètre** d'une figure est la **longueur** de son contour, dans une unité de longueur donnée.

Exemple :

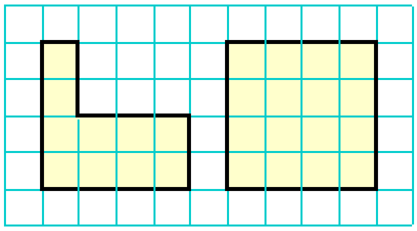
Pour calculer le périmètre d'un **polygone**, on effectue la somme des longueurs des côtés du polygone.



Le périmètre de cette figure est égal à 18 u.l.
(1 + 2 + 3 +2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 4)

Exercice :

En prenant comme unité de longueur la longueur d'un carreau, prouver que les deux figures ci-dessous ont le même périmètre.



2) Définition : Unité de longueur usuelle :

L'unité internationale pour la mesure de la **longueur** est le **mètre** (**m**).

Exemple :

1. Une pièce de monnaie a une épaisseur de 2 mm.
2. En général, une règle d'élève fait entre 20 et 30 cm de long.
3. Un « double-décimètre » est une règle de vingt centimètres de long.
4. Un voiture citadine mesure environ 4 m.
5. Une maison peut mesurer 1 dam de côté (10 m de côté).
6. Un terrain de football mesure environ 1 hectomètre (100 m).
7. En passant par la D468,il y a 2,7 km entre Gerstheim et Obenheim.

Exercice :

Trouver d'autres exemples d'utilisation des unités métriques.

3) Exemple de conversion d'unité de périmètre :

Enoncé : Convertir 30,6 cm en dam.

Correction détaillée :

Pour convertir des longueurs, on procède en trois étapes :

1. On place la virgule dans le tableau suivant dans l'unité de départ ;

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
					,	

2. On place le nombre dans le tableau en respectant la place de la virgule ;

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
				3	0 ,	6

3. On déplace la virgule dans l'unité souhaitant en ajoutant des 0 si nécessaires.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
		0 ,	0	3	0	6

4. On obtient : 30,6 cm = 0,0306 dam.

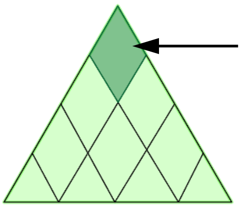
II) Aire d’un polygone :

1) Définition : Aire :

L’**aire** d’une figure est la mesure de sa **surface** dans une unité de surface donnée.

Exemple :

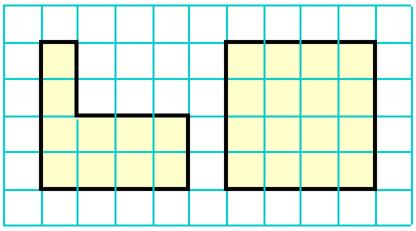
Pour calculer l’aire d’une figure, on calcule la quantité d’unités d’aires qui recouvrent cette surface.



L’aire de la figure verte est égale à 8 unités d’aire.
(6 unités d’aires entières + 4 moitiés)

Exercice :

En prenant comme unité d’aire la surface recouverte par un carreau, prouver que les deux figures ci-dessous, n’ont pas la même aire.



Remarque :

Les figurent de l’exercice précédent ont le même périmètre mais pas la même aire.

⚠ : Il n’y a pas de lien de proportionnalité entre le périmètre et l’aire d’une figure.

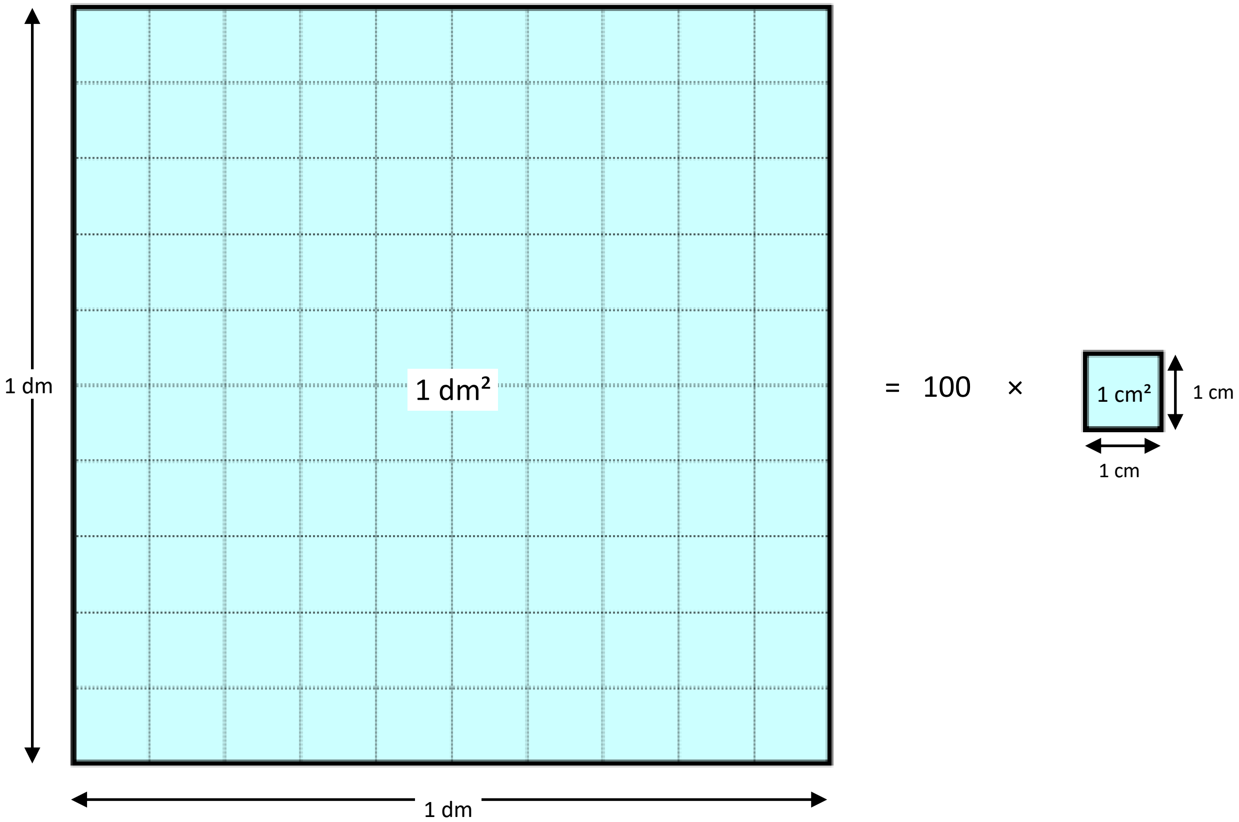
2) Définition : Unités d’aire usuelles :

L’unité internationale pour la mesure d’une surface est le **mètre carré** (**m²**)

Un 1 m² est la **surface** recouverte par un carré de côté 1 m.

Exemple :

Dans un décimètre carré (1 dm²), il y a 100 centimètre carré.



Exercice :

A ton avis, quelle unité utilise-t-on pour exprimer la surface :

a. d'un appartement b. d’un timbre c. d’une table d. d’une feuille de cahier e. d’un pays

3) Formules d’aire des polygones usuels :

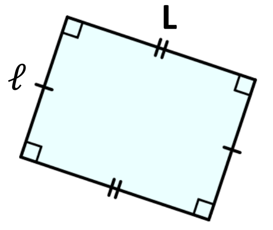
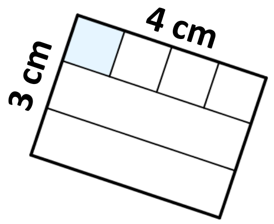
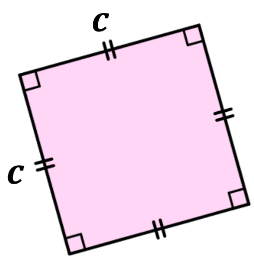
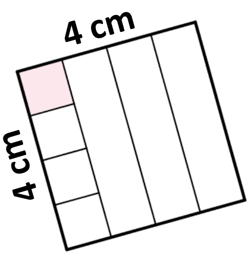
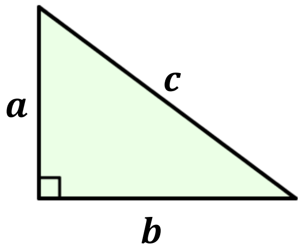
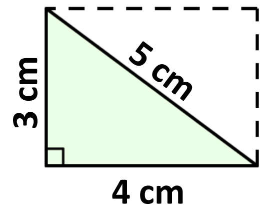
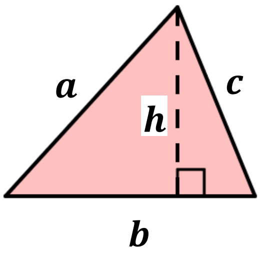
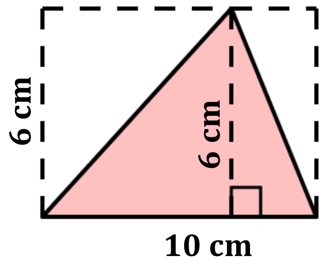
Figure	Dessin	Formule d’aire	Justification
Rectangle		$L \times \ell$	 Dans le rectangle ci-dessous, il y a 3 lignes de 4 carreaux. $\mathcal{A} = L \times \ell$ $= 3\text{ cm} \times 4\text{ cm}$ $= 12\text{ cm}^2$
Carré		$c \times c$	 Un carré est un rectangle particulier. Dans le carré ci-dessous, il y a 4 colonnes de 4 carreaux. $\mathcal{A} = c \times c$ $= 4\text{ cm} \times 4\text{ cm}$ $= 16\text{ cm}^2$
Triangle Rectangle		$\dfrac{a \times b}{2}$	 Un triangle rectangle est un demi-rectangle. Pour calculer son aire, on calcule l’aire du triangle rectangle et on divise par 2. $\mathcal{A} = \dfrac{a \times b}{2}$ $= \dfrac{3\text{ cm} \times 4\text{ cm}}{2}$ $= \dfrac{12\text{ cm}^2}{2}$ $= 6\text{ cm}^2$.

Figure	Dessin	Formule d'aire	Justification
Triangle quelconque		$\dfrac{b \times h}{2}$	 Un triangle quelconque est un demi-rectangle de longueur sa base et de largeur sa hauteur. $\mathcal{A} = \dfrac{b \times h}{2}$ $= \dfrac{10\text{ cm} \times 6\text{ cm}}{2}$ $= \dfrac{60\text{ cm}^2}{2}$ $= 30\text{ cm}^2$.

<u>0Exercice :</u>
Tracer un triangle ABC de côté 5 cm, 7 cm, et 9 cm. Tracer la hauteur issue de A de ce triangle puis la mesurer.
À l'aide de la mesure précédente, proposer une valeur approchée de l'aire de ce triangle.

3) Exemple de conversion d'unité d'aires:

<u>**Enoncé :**</u> Convertir 5,8 m² en dm².

<u>Correction détaillée :</u>
Pour convertir des longueurs, on procède en trois étapes :

1. On place la virgule dans le tableau suivant dans l'unité de départ (toujours dans la colonne la plus à droite);

km²		hm²		dam²		m²		dm²		cm²		mm²	
							,						

2. On place le nombre dans le tableau en respectant la place de la virgule ;

km²		hm²		dam²		m²		dm²		cm²		mm²	
							5,	8					

3. On déplace la virgule dans l'unité souhaitant en ajoutant des 0 si nécessaires.

km²		hm²		dam²		m²		dm²		cm²		mm²	
							5	8	0,				

4. On obtient : 5,8 m² = 580 dm².

<u>Exercice :</u>
Trouver d'autres exemples d'utilisation des unités métriques.

<u>Remarque :</u>
Pour restant cohérent avec le fait qu'il y ait 100 cm² dans un dm², etc.
il y a **deux** colonnes par unité dans le tableau de conversion des unités d'aire.
Le …² de m² permet de s'en souvenir facilement.

III) Périmètre d'un cercle et aire d'un disque :

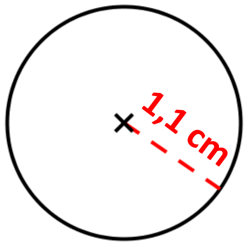
1) Propriété : Périmètre d'un cercle

Le périmètre d'un cercle est la longueur du tour du cercle.
Le périmètre d'un cercle de rayon r est donnée par la formule :

$$P = 2 \times \pi \times r$$

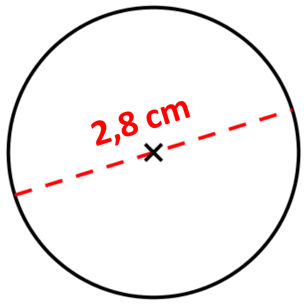
où π est un nombre proche de $3{,}14$.

Exemple 1 :
Calculer une valeur approchée au dixième près de la longueur, en cm, du cercle ci-dessous :



$$\begin{aligned} P &= 2 \times \pi \times r \\ &= 2 \times \pi \times 1{,}1 \\ &= 2{,}2\,\pi \\ &\approx 6{,}9 \text{ cm} \end{aligned}$$

Exemple 2 :
Calculer une valeur approchée au millième près de la longueur, en cm, du cercle ci-dessous :



Pour utiliser la formule, il est nécessaire de commencer par calculer le rayon du cercle :
Rayon = Diamètre ÷ 2
= 2,8 cm ÷ 2
= 1,4 cm

$$\begin{aligned} P &= 2 \times \pi \times r \\ &= 2 \times \pi \times 1{,}4 \\ &= 2{,}8\,\pi \\ &\approx 8{,}796 \text{ cm} \end{aligned}$$

On remarque ici que pour calculer le périmètre d'un cercle, on pourrait aussi utiliser la formule :
Diamètre × π

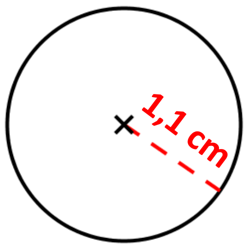
2) Propriété : Aire d'un disque

L'aire d'un disque est la surface du disque.
L'aire d'un disque de rayon r est donnée par la formule :

$$\mathscr{A} = \pi \times r^2 \qquad (= \pi \times r \times r)$$

où π est un nombre proche de $3{,}14$.

Exemple :
Calculer une valeur approchée au dixième près de l'aire, en cm², du disque ci-dessous :



$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \pi \times r^2 \\ &= \pi \times r \times r \\ &= \pi \times 1{,}1 \times 1{,}1 \\ &= 1{,}21\,\pi \\ &\approx 3{,}8 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Exercice :
Calculer une valeur approchée au millième près de l'aire, en cm, du cercle ci-dessous :