

Éléments de solutions pour un corrigé de l'épreuve de découverte de décembre 2018

Exercice 1 – Chapeau l'artiste – 7 points -

Si Thomas porte un chapeau vert, il y a deux possibilités :

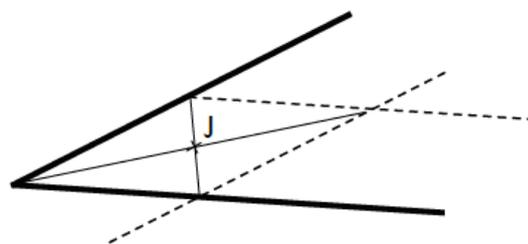
- L'un de ses collègues porte aussi un chapeau vert.
Dans ce cas-là, le troisième clown, voyant deux chapeaux verts, aurait compris qu'il porte un chapeau rouge et aurait répondu « oui ».
- Ses deux collègues portent des chapeaux rouges. Dans ce cas-là, Michel aurait compris qu'il porte un chapeau rouge et aurait répondu « oui » ; car s'il portait un chapeau vert comme Thomas, Anatole aurait répondu « oui ».

Les deux cas sont donc impossibles, et Thomas sait qu'il porte un chapeau rouge.

Thomas a un chapeau rouge, il n'a pas besoin de voir la couleur des chapeaux pour répondre OUI.

Exercice 2 – Par Jupiter – 5 points -

J étant au milieu des emplacements des deux cachettes, ce sera le centre de symétrie d'un parallélogramme. Il suffit alors de construire l'image des deux allées par une symétrie de centre J de ce parallélogramme. Les extrémités de la petite diagonale (voir figure) sont les positions des cachettes recherchées.



Exercice 3 – Ça roule Raoul – 7 points -

- ✓ Dans le premier cas, le petit disque n'aura fait que 1 tour dans le grand cercle, en tournant 4 fois sur lui-même, d'où 4 contacts du stylo : $32 = 8 \times 4$
- ✓ Dans le deuxième cas, quand le petit disque aura fait 1 tour dans le grand cercle, il aura tourné 4,5 fois sur lui-même et son stylo qui aura déjà eu 4 contacts sera à l'opposé de sa position de départ. Un deuxième tour dans le grand cercle lui permettra de retrouver sa position initiale, il aura eu 9 contacts en 2 tours.
Ce qui pourra se traduire par le calcul : $36 \times 1 = 8 \times 4 + 4$ $36 \times 2 = 8 \times 9$
- ✓ Dans la situation demandée : $30 \times 1 = 9 \times 3 + 3$ $30 \times 2 = 9 \times 6 + 6$ $30 \times 3 = 9 \times 10$
**Si Raoul utilise un cercle de 30 cm et un disque de 9 cm,
il y aura 10 points de contact en 3 tours..**

Remarque : Si on divise par 2π les longueurs parcourues, il reste à trouver le premier multiple commun aux deux rayons.

Exercice 4 – Bon appart – 5 points -

Soit n le nombre d'appartements par niveau.

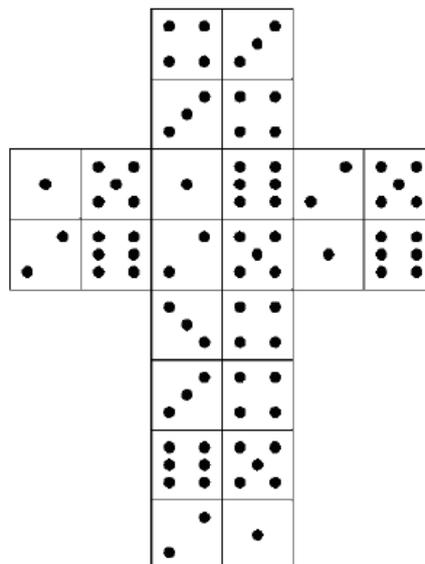
Au premier niveau on va de 1 à n ; au deuxième, de $n+1$ à $2n$; au troisième, de $2n+1$ à $3n$ etc.

Au cinquième niveau on va de $4n+1$ à $5n$ donc : $4n < 65 < 5n+1$, d'où $12,8 < n < 16,25$.

Le nombre d'appartements par niveau peut être 13, 14, 15 ou 16.

Exercice 5 – Patron l'addition – 7 points -

L'unique patron complet sera :



Exercice 6 – Trous bien vus – 5 points -

La somme 6 de la première colonne impose dans celle-ci 1 ; 2 et 3.

Le total 27 de la deuxième ligne fixe la position du 3 et impose le contenu complémentaire 7 ; 8 et 9.

De même, le total de la deuxième colonne impose son contenu 7 ; 8 et 9 et la somme de la première ligne fixe la position du 7.

Par essais successifs, il n'y a que deux solutions possibles.

2	7	1	3	13
3	9	7	8	27
1	8	3	9	
6	24	11	20	

2	7	1	3	13
3	8	7	9	27
1	9	3	8	
6	24	11	20	

Exercice 7 – Prends de la hauteur – 7 points -

Les triangles d'aires 10 et 15 ont une base commune, mais pas la même hauteur correspondante. La hauteur de la partie inférieure du quadrilatère est donc 1,5 fois plus grande que celle de la partie supérieure, et ceci est aussi vrai pour les deux triangles de droite. Ce qui fait que le triangle blanc a une aire de $4 \times 1,5 = 6 \text{ cm}^2$.

L'aire totale du quadrilatère est de 35 cm^2 .

Exercice 8 – Range-tout – 5 points -

Soit l la largeur d'une planchette, L sa longueur et e son épaisseur :

$$l = 2e \quad L = 5e \quad \text{et le volume de la planchette est } v = eLl = 10e^3$$

Soit V le volume de la boîte, on a : $V = 480e^3 = 8 \times 16 \times 30$

D'où $e^3 = 8$ et par conséquent $e = 2$.

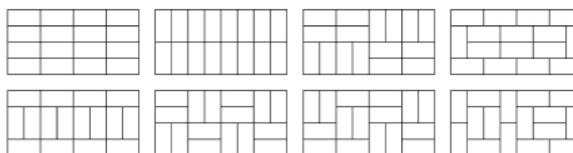
Les dimensions d'une planchette sont : épaisseur 2 cm, largeur 4 cm et longueur 10 cm.

Il y a une quantité de manières de disposer ces planchettes dans la boîte.

Si on suppose que la hauteur de la boîte est 30 cm, on pense tout de suite à mettre 3 paquets de planchettes en hauteur pour faire les 30 cm.

Chaque paquet devra donc contenir 16 planchettes, et ici on n'a que l'embaras du choix.

Voici quelques vues du dessus du rangement dans la boîte.



Exercice 9 – Près d'Émile – 7 points -

Le périmètre étant donné par la somme des deux longueurs et des deux largeurs, les pièces des quatre coins seront comptées deux fois. Ce périmètre est donc de 128, la largeur et la longueur totalisant 64, avec de nombreuses possibilités :

le puzzle carré de 32 pièces sur 32 qui totalise 1024 pièces, puis les puzzles rectangulaires :

- 33 x 31 = 1023 pièces 34 x 30 = 1020 pièces 35 x 29 = 1015 pièces
- 36 x 28 = 1008 pièces 37 x 27 = 999 pièces 38 x 26 = 988 pièces
- 39 x 25 = 975 pièces etc.

Le nombre exact de pièces du puzzle d'Émile est 999.

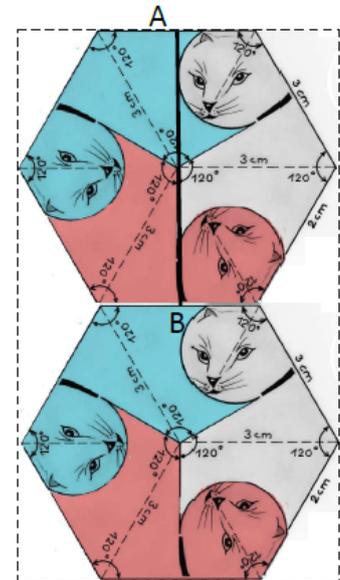
Exercice 10 – Chat pave – 10 points -

L'épaisseur des pièces (5 mm) et la hauteur de la boîte (5 cm) laissent imaginer qu'il faudra mettre 10 pièces sur chaque couche. Et on constate qu'elles s'assemblent trois par trois pour former un hexagone régulier (donc ces pièces permettent de paver le plan). Il faudra mettre 6 pièces à plat, soit deux hexagones côte à côte. La hauteur [AB] d'un hexagone a pour mesure : $AB = 3\sqrt{3}$

(calcul de la hauteur d'un triangle équilatéral)

La longueur de la boîte va mesurer : $2AB = 6\sqrt{3} \approx 10,4 \text{ cm}$

Longueur minimale de la boîte 10,4 cm



Exercice 11 – À un poil près – 5 points -

L'hypoténuse du triangle de droite mesure : $\sqrt{25^2 + 20^2} = \sqrt{1025}$

x	32	33
x^2	1024	1089

$\overset{+1}{\curvearrowright}$
 $\underset{+65}{\curvearrowleft}$

On assimile la parabole entre les abscisses 32 et 33 à une droite. Si on suppose que les accroissements de x et de x^2 sont proportionnels, x^2 augmente de 1024 à 1025 quand x augmente de 32 à $32\frac{1}{65}$

Comme $\sqrt{1024} = 32$, on a $\sqrt{1025} \approx 32\frac{1}{65}$

Exercice 12 – En voiture – 7 points -

Il faut trouver combien de nombres sur les 999 possibles permettent à chacun de gagner.

Les nombres favorables à Romane sont les plus simples à trouver : les trois chiffres consécutifs peuvent être 0-1-2, ou 1-2-3, 2-3-4, 3-4-5, 4-5-6, 5-6-7, 6-7-8 ou 7-8-9. Chacun de ces triplets permet de former six nombres, par exemple pour 0-1-2, on peut faire les six nombres 012, 021, 102, 120, 201 et 210. Romane a donc 48 chances sur 999 de marquer un point.

Pour Timothée, une solution consiste à chercher dans l'ordre tous les nombres favorables :

011, 022, 033, 044, 055, 066, 077, 088, 099	: 9 nombres
110, 121, 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198	: 9 nombres
220, 231, 242, 253, 264, 275, 286, 297	: 8 nombres
330, 341, 352, 363, 374, 385, 396	: 7 nombres
440, 451, 462, 473, 484, 495	: 6 nombres
550, 561, 572, 583, 594	: 5 nombres
660, 671, 682, 693	: 4 nombres
770, 781, 792	: 3 nombres
880, 891	: 2 nombres
990	: 1 nombre

Il y a 54 nombres favorables à Timothée.

Timothée a le plus de chance de gagner.

Exercice 13 (secondes GT) – À pied – 10 points -

Soient v la vitesse du pas habituel de Victorien et V celle du trottoir roulant en m/s.

Soit L la longueur du trottoir (en m). On a :

$$v + V = \frac{L}{72} \text{ et } v - V = \frac{L}{360}. \text{ On en tire : } 2v = \frac{6L}{360} \text{ et finalement } \frac{L}{v} = 120$$

La durée de parcours sur le trottoir arrêté est 120 s ou 2 min.

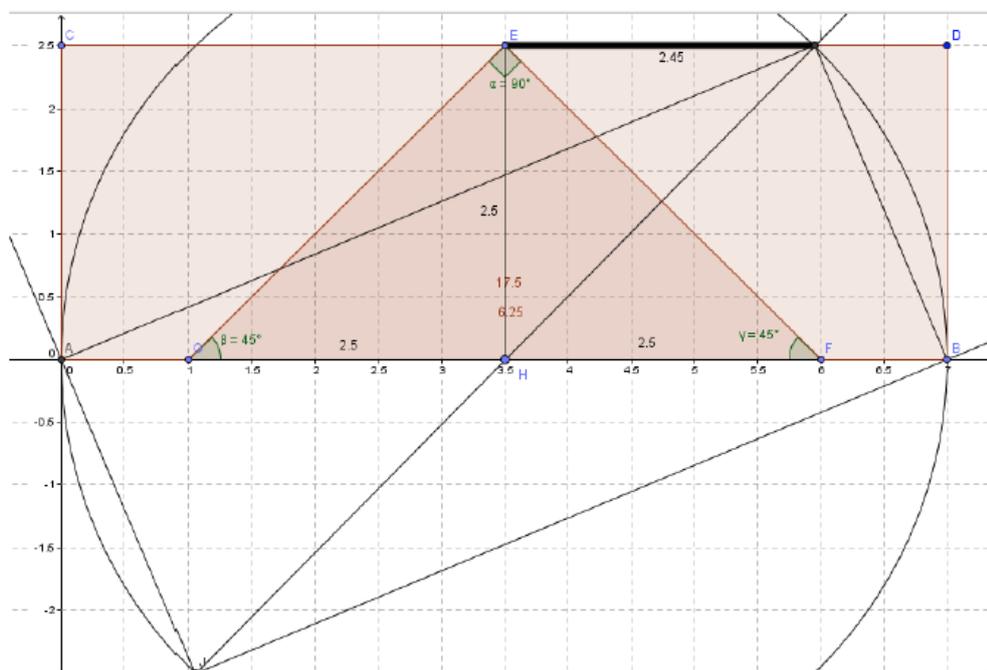
Il faudrait 2 min à Victorien pour aller d'un bout à l'autre du trottoir arrêté.

Exercice 13 (secondes Pro) – À led – 10 points -

La hauteur de la pièce est donnée par la lampe centrale ; le triangle rectangle isocèle est composé de deux triangles également rectangles et isocèles. On a la hauteur égale à 2,5 m.

Pour la position de la deuxième lampe, on peut par exemple, tracer le cercle de centre H et de rayon 3,5 m.

La distance qui sépare les deux spots est d'environ 2,45m.



Épreuve de découverte 2019 (décembre 2018)

Productions attendues et suggestions pour le barème

Document établi à l'attention des traducteurs et des correcteurs de l'épreuve

Les barèmes proposés sont purement indicatifs. Ils pourront évidemment être modifiés localement en fonction des priorités pédagogiques et de la teneur des programmes de mathématiques dans tel ou tel pays. Ils pourront également être adaptés au vu des productions des élèves qui sont parfois surprenantes et inattendues...

L'équipe de conception des sujets
de Mathématiques sans Frontières

Pour tout exercice :

- ✓ on attribuera 0 point lorsqu'une feuille-réponse a été rendue mais que celle-ci ne contient que des éléments totalement faux montrant que l'exercice n'a pas été compris. On s'efforcera toutefois autant que possible de valoriser toute trace de recherche pertinente ;
- ✓ on notera NT lorsqu'un exercice n'a pas été traité (feuille blanche ou non rendue).

Exercice 1 : Chapeau l'artiste ! – 7 points

Objectifs et compétences : Logique, constater que chaque réponse d'un clown est porteuse d'informations.

Raisonnement – Communiquer.

Barème proposé : Qualité de la rédaction en langue : **3 points**.

Réponse, raisonnement, explication : **4 points** dont **2 points** pour tout raisonnement faisant mention, directement ou indirectement, à la propriété « si un clown voit deux chapeaux verts, il va répondre Oui » et **1 point** pour la couleur du chapeau.

Exercice 2 : Par Jupiter – 5 points

Objectifs et compétences : Propriétés du parallélogramme. Précision et soin du tracé.

Modéliser.

Barème proposé : **3 pts** pour une construction géométrique correcte ; **1 pt seulement** si tracé par tâtonnement ; **2 pts** pour les explications.

Exercice 3 : Ça roule Raoul – 7 points

Objectifs et compétences : Périmètre du cercle, divisibilité, proportionnalité.

Calculer – Représenter.

Barème proposé : **4 pts** pour les calculs (rapport des périmètres ou rapport des rayons ou diviseurs) ; **3 pts** pour l'explication. **2 pts** pour toute trace de recherche cohérente.

Exercice 4 : Bon appart – 5 points

Objectifs et compétences : Division euclidienne.

Chercher – Représenter.

Barème proposé : **2 pts** une solution ; **1 pt** pour chaque solution suivante.

Exercice 5 : Patron, l'addition – 7 points

Objectifs et compétences : Vision dans l'espace, organisation de données.

Modéliser.

Barème proposé : Tout ou rien. Ne pas pénaliser ni l'orientation du « 2 » ni celle du « 6 ».

Exercice 6 : Trous bien vus – 5 points

Objectifs et compétences : Organisation de données.

Chercher – Calculer.

Barème proposé : **1 pt** pour la 1^{re} colonne même dans le désordre ; **1 pt** pour la 2^e colonne même dans le désordre. **5 pts** si la grille est correcte.

Exercice 7 : Prends de la hauteur – 7 points

Objectifs et compétences : Calculs d'aires et hauteurs dans un triangle, équations, proportionnalité

Raisonnement – Calculer.

Barème proposé : 4 pts reconnaissance des triangles et base commune 2 pts : aire triangle blanc 1 pt aire totale.

Exercice 8 : Range tout ! – 5 points

Objectifs et compétences : Espace, volume. Puissances, équation, puzzle, diviseurs.

Modéliser – Calculer – Chercher.

Barème proposé : 1 pt pour le volume de la boîte ; 1 pt pour « e = 2 » ; 1 pt pour les dimensions d'une planchette ; 1 pt pour une disposition possible et 1 pt pour une autre disposition.

Exercice 9 : Près d'Émile – 7 points

Objectifs et compétences : Décomposition, périmètre et notion d'aire, tâtonnement, essai-erreur, approximation.

Chercher – Modéliser.

Barème proposé : 1 pt pour une prise en compte des coins ; 1 pt pour la réponse ; 5 pts pour une méthode de résolution aboutissant à $37 \times 27 = 999$ encadré par $38 \times 26 = 988$ et $36 \times 28 = 1008$.

Remarque : Pour une réponse approchante (comme 1008 à la place de la bonne réponse) mettre 5 pts/7

Exercice 10 : Chat pave – 10 points

Objectifs et compétences : Pavage et calcul d'une hauteur dans un triangle, géométrie, volume.

Représenter – Calculer.

Barème proposé : 2 pts pour un assemblage hexagonal ; 3 pts pour le dessin du fond de la boîte ; 1 pt pour justifier 6 pièces par couche ; 2 pts pour le calcul de la longueur de la boîte, 2 pts pour le calcul de la hauteur du triangle

Spécial Seconde

Exercice 11 : À un poil près – 5 points

Objectifs et compétences : Approximation linéaire par proportionnalité, Pythagore, proportionnalité des accroissements.

Calculer – Raisonnement.

Barème proposé : 2 pts pour l'hypoténuse, 3 pts pour le reste.

Exercice 12 : En voiture ! – 7 points

Objectifs et compétences : Dénombrement, organisation de données, multiples, probabilités.

Chercher – Communiquer.

Barème proposé : 3 pts pour le dénombrement des cas favorables pour Romane ; 3 pts pour Timothée ; 1 pt pour la conclusion.

Exercice 13GT : À pied – 10 points (Spécial 2de Générale et Technologique)

Objectifs et compétences : Vitesse, proportionnalité, équations.

Calculer – Modéliser.

Barème proposé : 6 pts pour des essais aboutissant à une approximation de la réponse et 4 pts pour la vérification.

3 pts pour des essais de mise en équations ;

10 pts si équations correctes et bien résolues.

Exercice 13Pro : À led ! – 10 pts (Spécial Seconde Professionnelle)

Objectifs et compétences : Utiliser un logiciel de géométrie pour tracer, mesurer et vérifier la solution d'un problème. Triangle rectangle, propriétés du triangle rectangle et du triangle isocèle.

Modéliser avec un logiciel – Chercher.

Barème proposé : 4 pts pour le calcul de la hauteur de la pièce ; 3 pts pour le calcul ou graphique

3 pts pour l'écart correct (la distance obtenue par calcul ou schéma à l'échelle ou Géogébra).