Q.C.M : (Issues de brevets)

1.	L'expression développée de $(3x-5)^2$ est : $(3x-5)^2=(3x)^2-2\times3x\times5+5^2$ $=9x^2-30x+25$	a. $9x^2-25$	b. $3x^2-30x+25$	c. $9x^2-30x+25$
2.	*On considère la fonction f définie par f(x) = 2 – 3x.* L’image de 0 par f est $f(0)=2-3\times0$ $=2$	a. -1	b. 2	c. $\frac{2}{3}$
3.	*On considère la fonction f définie par f(x) = 2 – 3x.* L’antécédent de 3 par la fonction f est $f(x)=3$ $2-3x=3$ $-3x=3-2$ $-3x=1$ $x=\frac{-1}{3}$	a. $\frac{1}{3}$	b. - 7	c. $\frac{-1}{3}$
4.	Le nombre $\frac{5}{7}+\frac{1}{7}\times\frac{4}{3}$ $\frac{5}{7}+\frac{1}{7}\times\frac{4}{3}=\frac{5}{7}+\frac{4}{21}$ $=\frac{15}{21}+\frac{4}{21}$ $=\frac{19}{21}$	a. $\frac{24}{21}$	b. $\frac{19}{21}$	c. $\frac{8}{7}$

Exercice 1 : Vientiane - 2013

Deux classes de collège ont répondu à la question suivante :
"Combien de livres avez-vous lus durant les 12 derniers mois ?"
Les deux classes ont communiqué les réponses de deux façons différentes :

Classe numéro 1 : 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 7 ; 7 ; 7

Classe numéro 2 :

Effectif total	25
Moyenne	4
Etendue	8
Médiane	5

1) Classe 1 :

$$\text{Nombre moyen de livres lus} = \frac{1+2+2+2+2+3+3+3+3+3+3+3+3+6+6+6+6+6+7+7+7}{21}$$

$$= \frac{1+2\times4+3\times8+6\times5+7\times3}{21} = \frac{84}{21} = 4$$

On constate que le nombre moyen de livres lu dans les deux classes est le même (à savoir 4).

2) Classe numéro 1 :
5 personnes personnes ont lu 6 livres et 3 personnes ont lu 3 livres.
Il y a un total de 5 + 3 = 8 grands lecteurs.

Classe numéro 2 :
La médiane est la valeur qui coupe un effectif d'une série statistique en deux groupes de même effectif.
Comme la médiane de la série statistique est 5 et que l'effectif total est de 21, on en déduit qu'il y a
10 élèves ayant lu 5 livres ou moins
et 10 élèves ayant lu 5 livres ou plus.

Le nombre de grands lecteurs est d'au moins 10, ce qui est supérieur à 8.
Le nombre de grands lecteurs est plus important dans la classe numéro 2 que dans la classe numéro 1.

3) Classe numéro 1 :
Dans la classe numéro 1, l'élève ayant lu le plus de livre en a lu 7 (valeur de la plus grande donnée).

Classe numéro 2 :
L'élève ayant lu le moins de livre en a lu 0 ou plus.
L'étendue de la série statistique est de 8 (valeur donnée par l'énoncé).

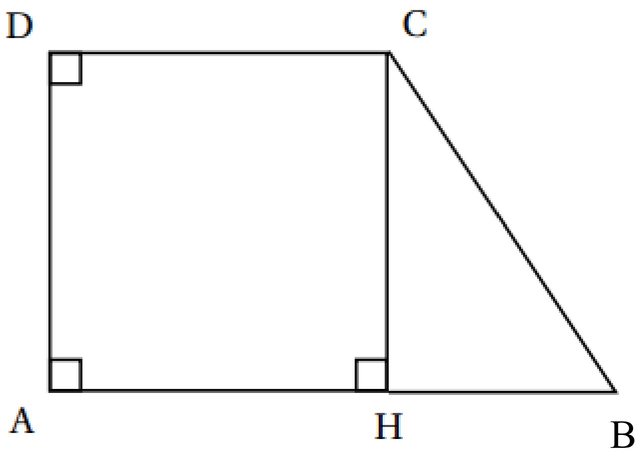
Par définition de l'étendue, on a :
Etendue = donnée la plus haute – donnée la plus basse.
On en déduit que :
8 = donnée la plus haute – donnée la plus basse.
Et donc que :
Donnée la plus haute ≥ 8 + donnée la plus basse = 8 + 0 = 8
Dans la classe numéro 2, l'élève qui a lu le plus de livres en a lu au moins 8.

4) 3 élèves parmi 21 de la première classe ont lu plus de 6 livres.
Pour trouver à combien de % cela correspond, on peut effectuer un produit en croix dans le tableau suivant :

3	21
	100

On obtient : $\frac{3\times100}{21}\approx 14{,}29$ %.

Exercice 2 : Nouvelle Calédonie – Mars 2013



La figure ci-contre représente un trapèze rectangle ABCD tel que :
AB = 12 cm ; CD = 9 cm ; BC = 5cm.

1. H est le pied de la hauteur issue de C.
   a. Montrer que HB = 3 cm.

La quadrilatère AHCD a 3 angles droits donc c'est un rectangle.

Les côtés opposés d'un rectangle sont de même longueur donc CD = AH = 9 cm.

Les points A, H et B sont alignés donc AB = AH + HB.
En remplaçant par les valeurs numériques, on a :
12 = 9 + HB.
On en déduit que HB = 12 – 9 = 3 cm.

   b. Calculer CH.

Le triangle HBC est rectangle en H.
D'après le théorème de Pythagore on a :
$HC^2 + HB^2 = BC^2$
en remplaçant par les valeurs numériques, on a :
$HC^2 + 3^2 = 5^2$
$HC^2 + 9 = 25$
$HC^2 = 25 - 9$
$HC^2 = 16$
$HC = \sqrt{16}$
HC = 4 cm.

   c. Déduire que le périmètre de ABCD est égal à 30 cm.

Le quadrilatère AHCD est un rectangle, aussi les côtés opposés d'un rectangle sont de même longueur.
On en déduit que DA = HC = 4 cm.

Le périmètre d'une figure est la longueur du tour de cette figure.
Périmètre ABCD = AB + BC + CD + DA
= 12 + 5 + 9 + 4
= 30 cm.

2. Calculer la mesure de l'angle ABC au degré près. $\frac{1}{32}$

Le triangle HBC est rectangle en B.
D'après la définition du cosinus, on a :

$$\cos\widehat{\mathrm{HBC}} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

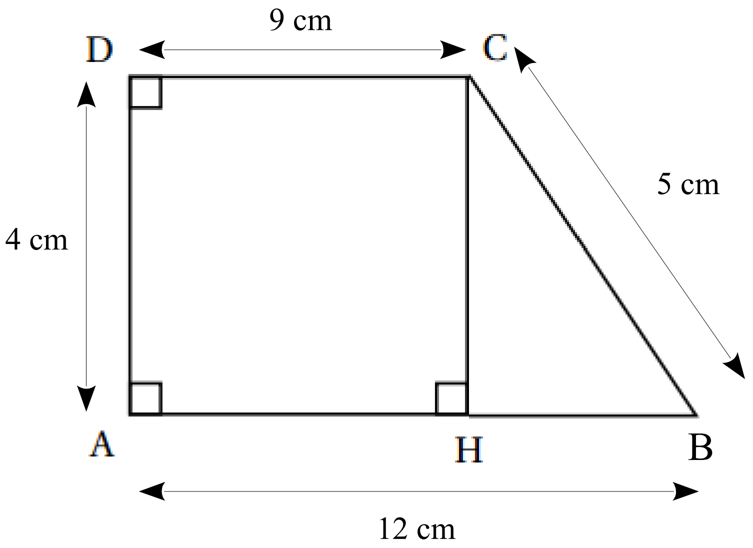
$$\cos\widehat{\mathrm{HBC}} = \frac{HB}{BC}$$

$$\cos\widehat{\mathrm{HBC}} = \frac{3}{4}$$

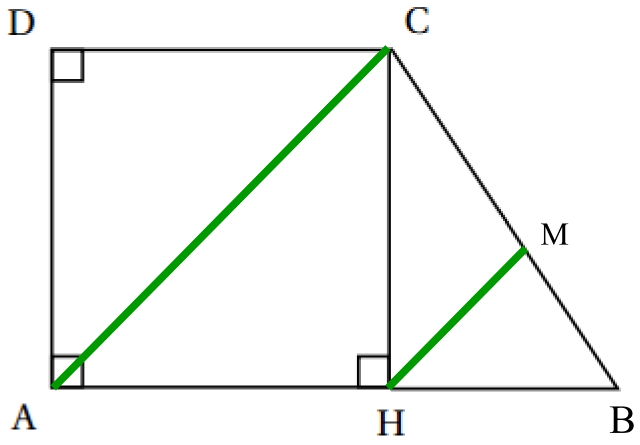
$$\widehat{HBC} = \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\widehat{HBC} \approx 41$$

3. Représenter sur la copie la figure aux dimensions réelles.



4. La parallèle à (AC) passant par H coupe la droite (BC) en M. Compléter la figure.



5. Calculer BM.

On sait que :
Les droites (AH) et (CM) se coupent en B.
Les droites (AC) et (HM) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a :

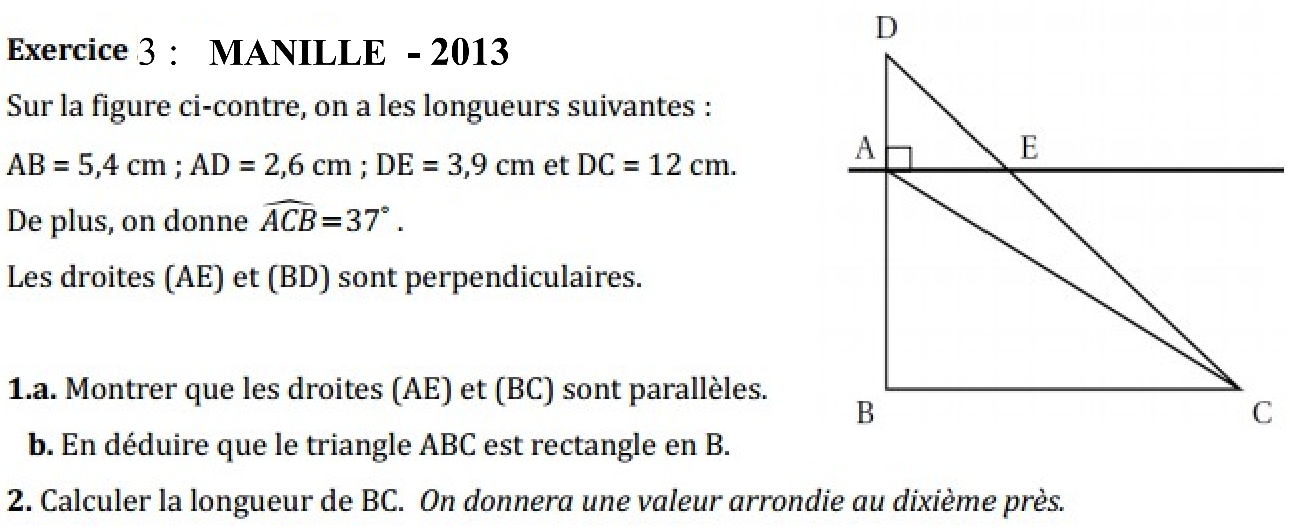
$$\frac{HB}{AB}=\frac{MB}{BC}=\frac{HM}{AC}$$

$$\frac{3}{12}=\frac{MB}{5}=\frac{HM}{AC}$$

d'après l'égalité des produits en croix, on a :

$$MB=\frac{3\times5}{12}$$

$$MB=\frac{15}{12}=1{,}25$$



Exercice 3 : **MANILLE - 2013**

Sur la figure ci-contre, on a les longueurs suivantes :

AB = 5,4 cm ; AD = 2,6 cm ; DE = 3,9 cm et DC = 12 cm.

De plus, on donne $\widehat{ACB}=37^\circ$.

Les droites (AE) et (BD) sont perpendiculaires.

1.a. Montrer que les droites (AE) et (BC) sont parallèles.

b. En déduire que le triangle ABC est rectangle en B.

2. Calculer la longueur de BC. *On donnera une valeur arrondie au dixième près.*

1. a.

Les points D, A et B sont alignés donc : DB = DA + AB.
On en déduit que :
DB = 2,6 + 5,4= 8

Les droites (AB) et (EC) se coupent en D.
Les points BA, D et C, E, D sont alignés dans le même ordre

On a d'une part :

$$\frac{DA}{DB}=\frac{2,6}{8}$$

On a d'autre part :

$$\frac{DE}{DC}=\frac{3,9}{12}$$

Or : $2,6 \times 12 = 31,2$
$8 \times 3,9 = 31,2$ ⟶ On en déduit que : $\frac{DA}{DB}=\frac{DE}{DC}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, **les droites (AE) et (BC) sont parallèles.**

1. b.

On sait que :
(AE) // (BC) *d'après la question précédente.*
(DB) $\perp$ (BC) *d'après le codage.*

Or :
Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Donc :
Les droites (BD) et (BC) sont perpendiculaires.

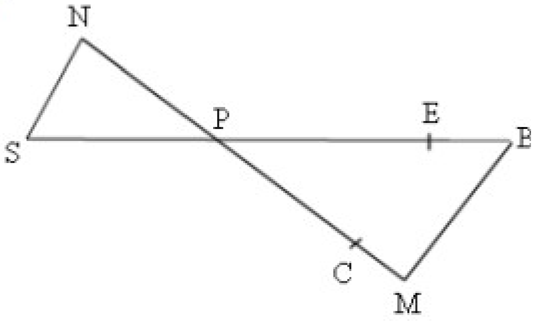
On en déduit que le triangle BCD est rectangle en B.

2.

Dans le triangle BCD rectangle en B,
on a d'après le théorème de Pythagore :
$BD^2 + BC^2 = CD^2$
$8^2 + BC^2 = 12^2$
$64 + BC^2 = 144$
on en déduit que
$BC^2 = 144 - 64$
$BC^2 = 80$
$BC = \sqrt{80}$
$BC \approx 8,9$

Exercice4 :   VIENTIANE **- 2013**

On considère la figure ci contre qui n'est pas réalisée en vraie grandeur.



Les points S, P, E et B sont alignés ainsi que les points N, P, C et M.
Les droites (MB) et (NS) sont parallèles.
On donne : PM = 12 cm, MB = 6,4 cm ; PB = 13,6 cm et PN = 9 cm.

1) Démontrer que le triangle PBM est rectangle.

2) Calculer la longueur NS.

3) On considère le point E du segment [PB] tel que PE = 3,4 cm et
le point C du segment [PM] tel que PC = 3 cm.
Les droites (CE) et (MB) sont-elles parallèles ? Justifier.

4) Reproduire la figure à l'échelle $\frac{1}{2}$.

1) Comme :

$$PB^2=13,6^2=184,96$$
$$MP^2+MB^2=12^2+6,4^2=144+40,96=184,96$$

On a :

$$PB^2=MP^2+MB^2$$

et donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle PMB est rectangle en M.

2) Les droites (NM) et (SB) se coupent en P.
Les droites (NS) et (BM) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{NP}{PM}=\frac{SP}{PB}=\frac{NS}{BM}$$
$$\frac{9}{12}=\frac{SP}{13,6}=\frac{NS}{6,4}$$

d'après l'égalité des produits en croix, on a :

$$NS=\frac{9\times 6,4}{12}$$
$$NS=\frac{57,6}{12}$$
$$NS=4,8\text{ cm}$$

3) Les droites (EB) et (CM) se coupent en P.
Les points P, E, B et P, C, M sont alignés dans le même ordre

On a d'une part :

$$\frac{\mathbf{PE}}{\mathbf{PB}}=\frac{\mathbf{3,4}}{\mathbf{13,6}}$$

On a d'autre part :

$$\frac{\mathbf{PC}}{\mathbf{PM}}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{12}}$$

Or :

3,4 × **12 = 40,8**
13,6 × 3 = 40,8

⟶ On en déduit que : $\frac{\mathbf{PE}}{\mathbf{PB}}=\frac{\mathbf{PC}}{\mathbf{PM}}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, **les droites (EC) et (BM) sont parallèles.**

Exercice 5 : Canberra – 2013

On considère le programme de calcul suivant :

- ☐ Choisir un nombre de départ
- ☐ Multiplier ce nombre par -2
- ☐ Ajouter 5 au produit
- ☐ Multiplier ce résultat par 5
- ☐ Ecrire le résultat obtenu.

1) Vérifier que, lorsque le nombre de départ est 2, on obtient 5

2) Lorsque le nombre de départ est 3, quel résultat obtient-on ?

3) Quel nombre faut-il choisir au départ si l'on veut que le résultat obtenu soit 0 ?

4) Arthur prétend que, pour n'importe quel nombre de départ x, l'expression $(x - 5)^2 - x^2$ permet d'obtenir le résultat du programme de calcul. A-t-il raison ? Justifier.

1) + 2) + 3)

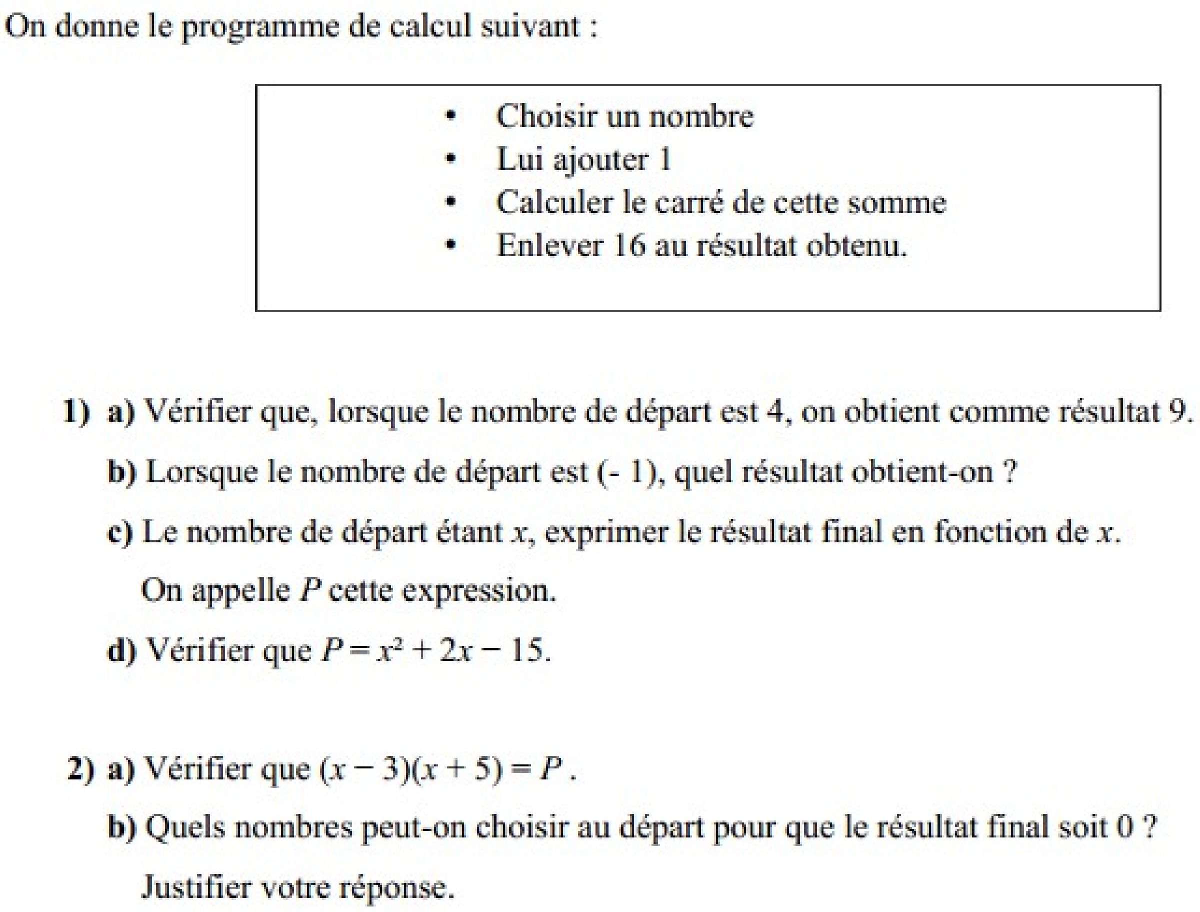
$\times(-2)$	1. Choisir un nombre de départ	2	3	2,5	x	$\div(-2)$
$+5$	2. Multiplier ce nombre par -2	-4	-6	-5	$-2x$	-5
$\times5$	3. Ajouter 5 au produit	1	-1	0	$-2x + 5$	$\div5$
	4. Multiplier ce résultat par 5.	5	-5	0	$(-2x + 5) \times 5$	

4) En développant $(x - 5)^2 - x^2$, on obtient : $(x^2 - 2 \times x \times 5 + 25) - x^2 = x^2 - 10\,x + 25 - x^2 = -\ 10\,x + 2$

En Développant $(-2x + 5) \times 5$, on obtient : $-\ 2x \times 5 + 5 \times 5 = -\ 10\,x + 2$

Les deux expressions ont la même forme développée, elles sont bien égales.

Exercice 6 : BANGKOK - 2013



On donne le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- Lui ajouter 1
- Calculer le carré de cette somme
- Enlever 16 au résultat obtenu.

1) a) Vérifier que, lorsque le nombre de départ est 4, on obtient comme résultat 9.

b) Lorsque le nombre de départ est (- 1), quel résultat obtient-on ?

c) Le nombre de départ étant x, exprimer le résultat final en fonction de x.

On appelle P cette expression.

d) Vérifier que $P = x^2 + 2x - 15$.

2) a) Vérifier que $(x - 3)(x + 5) = P$.

b) Quels nombres peut-on choisir au départ pour que le résultat final soit 0 ?

Justifier votre réponse.

1) a) + b) + c)

+1

$\ldots^2$

−16

1. Choisir un nombre de départ	4	(-1)	x
2. Lui ajouter 1	5	0	$x + 1$
3. Calculer le carré de cette somme	25	0	$(x + 1)^2$
4. Enlever 16 au résultat obtenu	9	-16	$(x + 1)^2 - 16$

−1

$\sqrt{\ldots}$

+16

d) En développant $(x + 1)^2 - 16$, on obtient : $(x^2 + 2 \times x \times 1 + 1) - 16 = x^2 + 2x + 1 - 16 = x^2 + 2x - 15$

2) a) $(x - 3)(x + 5) = x \times x + x \times 5 + (-3) \times x + (-3) \times 5$

$= x^2 + 5x - 3x - 15$

$= x^2 + 2x - 15$

b) $(x - 3)(x + 5)$ est le produit de deux facteurs.

Aussi, si le produit de deux facteurs est nul alors l'un des facteurs au moins est nul.

Donc :

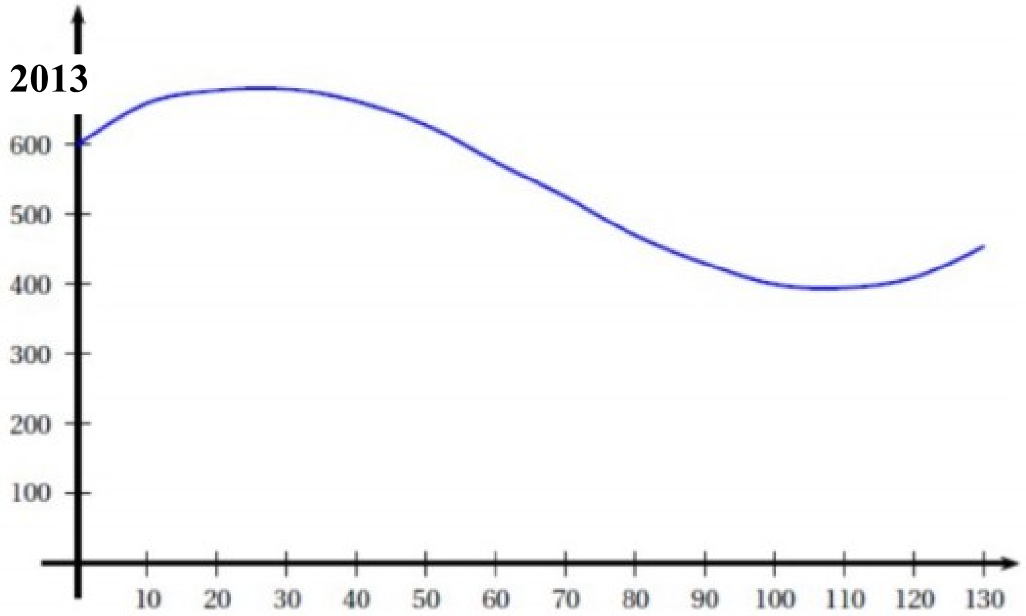
Soit : $(x - 3) = 0$ et donc $x = 3$

Soit : $(x + 5) = 0$ et donc $x = -5$

Exercice 58 : TOKYO - 2013

*Dans cet exercice, le graphique **n'est pas** à rendre avec la copie et il n'est pas obligatoire d'y indiquer les lectures.*

Une usine fabrique du jus de fruits. Soit C une fonction qui à une quantité de jus fabriquée en litre(s) associe le coût de fabrication en euros.
On a représenté ci-dessous la fonction C pour une quantité de jus comprise entre 0 et 130 litres.



1) **a)** Donner le coût de fabrication de 100 litres de jus.
   b) Pour quelle(s) quantités de jus, le coût de fabrication est-il supérieur à 550 euros ?
2) **a)** Donner l'image de 85 par la fonction C.
   b) Lire $C(75)$
   c) Donner les antécédents de 600 par la fonction C.

1) a) Le coût de fabrication de 100 litres de jus est d'environ 400 €.
b) Le coût de la fabrication est supérieur à 550 € lorsque la quantité de jus de fruit est comprise entre 0 et 65 litres.
2) a) l'image de 85 litres par la fonction C est de 450 €.
b) C(75) = 500.
c) Les antécédents de 600 par la fonction C sont : 0 et environ 58.

Bonus :
Prouver que : $(4x-3)^2-9=4x(4x-6)$

On a d'une part :
$(4x-3)^2-9=((4x)^2-2\times4x\times3+3^2)-9$
$=16x^2-24x+9-9$
$=16x^2-24x$

On a d'autre part :
$4x(4x-6)=4x\times4x+4x\times-6$
$=16x^2-24x$

Les versions développées de $(4x-3)^2-9$et de $4x(4x-6)$ **sont identiques. Donc**
$(4x-3)^2-9=4x(4x-6)$